On quantization of electromagnetic field.
I. Classical electrodynamics.

D. A. Arbatsky*

February 7, 2008

arXiv:math-ph/0402003v1 4 Feb 2004

Abstract

A technique for investigation of classical fields is developed on the base of invariant Hamiltonian formalism. Electromagnetic and scalar fields are considered as particular examples of using the general method. Poisson brackets for these fields are calculated. The necessity of introduction of "non-physical" degrees of freedom for electromagnetic field is explained.

1. Introducing remarks. This paper is the first in the set of six joined by the same title. References to these papers will be given here in Roman numbers: [I], . . . , [VI].

One of the causes for this research was the attempt to answer the question: What is the structure of the space of states of quantized electromagnetic field, considered from functional analysis?

1. When they describe Gupta-Bleuler quantization scheme modern textbooks silently imply that the question about the topology of quantum space of states of quantized electromagnetic field is solved in full analogy with scalar field. And electromagnetic field is quantized either in usual Hilbert space (such a construction is not relativistic invariant, even in non-apparent way [VI]) or in "Hilbert space with indefinite metric" (in such an approach the question about the topology has not been considered yet with all necessary mathematical strictness; in fact, it turns out that the space of states has not been defined constructively at all).

   Anyway, founded on different analogies, it is usually supposed that the space of states, from *topological* point of view, *must* be a Hilbert space. From our research it will be clear, that this point of view is erroneous. And this result is quite general: it forces us to make a new look at quantization of fields, even those fields that were quantized quite well up to now (for example, the scalar field).

2. It will be shown that the root of the problem is not in functional analysis, but in algebra. The process of quantization in Fock space was not satisfactorily described from *algebraic* point of view yet. This is because, following Fock [1], for construction of quantized electromagnetic field people take as a starting object the one-particle quantum space of states. But such an algebraic structure is too poor: there is no algebraic process that allows to construct quantized field, based on this structure (Namely, using only structure of one-particle state, it is impossible to introduce local field operators (see, for example, [3], chapter 5)).

   It will be clear from this research that an adequate algebraic structure for construction of a quantized field is a classical field, described with the use of the invariant Hamiltonian formalism.

3. After solving algebraic questions (i. e. formulating satisfactory quantization scheme) the solution of the question about topology appears to be a quite "working" (non-fundamental) problem. It appears to be important to realize that it is necessary for constructing the space of states of electromagnetic field to abandon to use Hilbert space. In the paper [VI] for solving this problem we will introduce new types of functional spaces.

4. There is no reason to discuss the question about relativistic invariance of the suggested construction of quantized field. The suggested construction is not only invariant: the requirement of relativistic invariance is the part of the construction.

   If we use the quantization scheme, given here, for quantizing the harmonic oscillator, the requirement of invariance with respect to some group substitutes (in some sense) the requirement of using Hilbert space as

*http://d-a-arbatsky.narod.ru/

a space of states. And we get two quantizations: one in Hilbert space and one — in the space with indefinite scalar product.

So, we do not even try to generalize Stone-von Neumann theorem for the case of relativistic fields: instead, we suggest completely different conception of quantization, which works *differently* even in the case of the harmonic oscillator.

5. So far as our approach to quantization is consistently oriented to explicit control of a symmetry (in the case of relativistic fields — with respect to the Poincare group), it becomes possible to see, how the action of a group of symmetry is transferred from classical space of states to quantum. It will not be an exaggeration to say that these are our papers where it is for the first time explained (at the rigorous level) how a quantum system gets integrals of motion of the same type that corresponding classical system has (and these integrals are connected with the group of symmetry).

6. It is well known from the classical paper of Bohr and Rosenfeld [4] that some problems arise when we consider field operators in a fixed point of space-time. In modern books pretending to mathematical strictness it is said that we have in this case an "operator distribution". But as far as I know no pithy mathematical theory of such distributions (like theory of generalized functions) was created. So, the term "operator distribution" still only expresses the fact that symbols like $\hat{A}_\mu(x)$ have *no* rigorous sense at all.

   If we use the invariant Hamiltonian formalism as a base for construction of quantum fields, we can see that this problem can be investigated even in the classical mechanics, and much more clearly.

   From the formal point of view, it is possible to investigate this question even in this paper. Especially as rigorous approach to calculation of Poisson brackets requires discussion of the topology of invariant phase space. Nevertheless, I prefer to postpone this question to the last paper. This is because the choice of topology for invariant phase space can be clearly and simply *motivated* only after consideration relativistic fields from the point of view of group theory [IV] and discussion of quantization [VI].

7. It is known that it is possible to add some divergence to the Lagrangian of a field without changing the equations of the motion. It is shown in the paper [II] that invariant Hamiltonian description of a field is not changed in this case. So far as the suggested scheme of quantization is totally based on the structure of the invariant Hamiltonian formalism, obtained quantization does not depend on this substitution of Lagrangian also.

8. So far as for the base for construction of quantized fields we use classical field, not one-particle quantum space, Wigner-Mackey theory (about unitary representations of the Poincare group) does not play a fundamental role for us. The analogy of this theory is the theory of symplectic representations of Poincare group (in the paper [IV] I tried to describe some foundations).

   The theory of symplectic representations of Poincare group is similar to the theory of unitary representations. But the example of electromagnetic field shows that there is not full analogy here.

9. In our account we will orientate ourself mainly to linear real Bose fields. The requirement of linearity here is of principle: we cannot quantize non-linear fields. As to requirements of reality and being Bose-field, these restriction are accepted here only to simplify notations and formulations. "Complexity" of a field just means the existence of additional complex structure. As to Fermi fields, for their description we need to use Grassmanian variables (see, for example, [6]). It is not important for our consideration, whether we use usual or Grassmanian numbers.

In this paper we give classical description of electromagnetic field. The main goal is to give an account of well-known facts in a new language. However this approach allows us to look at some questions completely differently: for example, the question about energy of electrostatic field was treated incorrectly till now.

2. Notations. In tensor notations we will write vectors of Minkowski space as a_μ , b_ν etc. And we will use only *contravariant* components of tensors; indexes numbering components will be written always *down*. The frame of reference will be always supposed to be orthonormal with respect to the scalar product $g(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$, so that metric tensor has standard appearance: $g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}\,(+1,-1,-1,-1)_{\mu\nu}$. Repeating indexes always imply summation with due regard for signs. For example, the scalar product will be written as

$$a\,b = a_\mu\,b_\mu = g_{\mu\nu}\,a_\mu\,b_\nu = a_0\,b_0 - a_1\,b_1 - a_2\,b_2 - a_3\,b_3 \ .$$

The derivatives with respect to space-time coordinates will be marked by the symbol ∂_μ :

$$\partial_\mu = \left(\tfrac{\partial}{\partial x_0} \;\middle|\; -\tfrac{\partial}{\partial x_1} \quad -\tfrac{\partial}{\partial x_2} \quad -\tfrac{\partial}{\partial x_3} \right)_\mu \ ,$$

so, the index of a derivative, like all indexes, is contravariant.

For reducing of notations the symbol of antisymmetrization is introduced: $^{[\mu\nu]}$. This symbol means that we make antisymmetrization with respect to the nearest indexes μ and ν following after it. For example, the tensor of electromagnetic field is written as $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu =^{[\mu\nu]} 2\,\partial_\mu A_\nu$.

D'Alembert operator is given by formula: $\partial^2 = \partial_\mu \partial_\mu$.

The Fourier transformation everywhere looks like:

$$\widetilde{\varphi}(k) = \int d^4x\, e^{+ikx}\, \varphi(x) \ , \qquad \varphi(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\, e^{-ikx}\, \widetilde{\varphi}(k) \ . \tag{1}$$

The system of units is so that $\hbar = c = 1$.

3. Invariant Hamiltonian formalism. It was shown in papers [7, 8, 9] that basic notions of the Hamiltonian formalism (namely, phase space and symplectic structure on it) can be treated in a relativistic invariant sense. In those papers formulas for symplectic structure of the most important systems were obtained (in coordinate representation). So, there was given a base of a scheme that can be called an invariant Hamiltonian formalism. A detailed account of this formalism see in original reviews [10, 11]. The question of equivalence of this approach and usual Hamiltonian mechanics for the case of systems with constraints was discussed also in [12].

Nevertheless I will remind here some basic notions. This is necessary in order to introduce our own notations.

Let field $\varphi_i(x)$ is described by the Lagrangian $L(\varphi_i, \partial_\mu \varphi_i)$. Here we will suppose that Lagrangian depends only on field values φ_i and their derivatives[1] and does not depend on the point x . Furthermore, we will consider only linear fields and Lagrangian will be supposed to be a quadratic function.

The least-action principle leads us to Euler-Lagrange equations:

$$\frac{\partial L}{\partial\, \varphi_i} - \partial_\mu \frac{\partial L}{\partial\, (\partial_\mu \varphi_i)} = 0 \ . \tag{2}$$

Invariant phase space Z is defined as the set of all functions[2] φ_i that satisfy equations (2). So long as we suppose the equation (2) to be linear, the space Z has natural linear structure.

The elements of the space Z we will denote by underlined sets of symbols; for example, $\underline{c} \in Z$. Functions on this space we will write as $f^{\,\underline{c}}$. For example, the value of the function φ corresponding to an element $\underline{c}$ in point x is written as $\varphi(x)^{\underline{c}}$.

We will usually identify elements of tangent bundle TZ with elements of the space Z . If it is necessary to point out that tangent vector $\underline{c}$ comes from a point $\underline{b} \in Z$, we can write it as $\underline{c\,[b]}$. Elements of cotangent bundle T^*Z will be similarly identified with the elements of adjoint space Z^* . At the same time, differentials of linear functions will be identified with functions, i. e. instead of writing df we write simply: f .

On the invariant phase space Z , like on usual phase space, there is a symplectic structure ω :

$$\omega = \int\limits_\Sigma d\sigma_\mu\, \delta j_\mu(x) \ , \qquad \text{here} \ \ \delta j_\mu(x) = \frac{\partial L}{\partial\, (\partial_\mu \varphi_i)} \wedge \varphi_i \ . \tag{3}$$

The integration is assumed over any space-like hyper-surface Σ , which behaves well enough in infinity. 2-form δj_μ is called a symplectic current. So long as the symplectic current is conserved, the result does not depend on the choice of the surface Σ .

The freedom in the choice of Lagrangian and non-uniqueness of the symplectic structure will be considered in the paper [II]. In reasonable sense we can say that non-uniqueness in the choice of Lagrangian does not influence the symplectic structure.

The symplectic structure ω , as usually [13], defines an isomorphism $I : T^*Z \to TZ$ of cotangent T^*Z and

[1] It will be sufficient here to restrict ourself with Lagrangians depending only on derivatives of the first order. In general case we can consider also Lagrangians with higher derivatives [12].

[2] More precisely, we will suppose for the present that we consider only smooth functions. We will also suppose that these functions differ from zero only on such a set, that intersection of this set with any space-like plane is finite. In paper [VI] we will discuss the question about natural topology of the space Z .

tangent TZ bundles[3]. It transfers any 1-form $l\dot{-} \in T^*Z$ to tangent vector $\underline{Il} \in TZ$, so that for any tangent vector $\underline{c} \in TZ$ we have the equality:

$$\omega^{\underline{c}\,;\,\underline{Il}} = l^{\underline{c}} \ . \tag{4}$$

If a form $l\dot{-}$ is a differential of some function $g\dot{-}$, i. e. $l\dot{-} = dg\dot{-}$, we say that $g\dot{-}$ is a generator of the vector field $\underline{Il} = \underline{I\,dg}$.

The Poisson bracket of two functions $f\dot{-}$ and $g\dot{-}$ is defined by equality:

$$\{\, f\,,\, g\,\} = df^{\,\underline{I\,dg}} \ . \tag{5}$$

If functions $f\dot{-}$ and $g\dot{-}$ are linear this definition can be written just as:

$$\{\, f\,,\, g\,\} = f^{\,\underline{Ig}} \ . \tag{6}$$

It will be enough here to restrict ourself with real fields, so the space Z will be a real linear space. Nevertheless, it is useful to consider complex functions on the phase space. Their differentials belong to complexified adjoint space. This is why instead of using the space Z^* we will always use its complexification $Z^*_{\mathbb{C}}$. Furthermore, when we define the Poisson bracket by formula (5), it is necessary to consider complex vectors $\underline{I\,dg}$. It could be avoided if we define the Poisson bracket in a more abstract way[4].

4. Scalar field. Consider the scalar field. Its Lagrangian is:

$$L = \tfrac{1}{2}\,\partial_\nu\varphi\,\partial_\nu\varphi - \tfrac{m^2}{2}\,\varphi^2 \ .$$

The equation of the motion (2) takes form (Klein-Fock-Gordon equation):

$$\left(\partial^2 + m^2\right)\varphi = 0 \ . \tag{7}$$

The symplectic structure (3) on the invariant phase space Z^{scal} in coordinate representation takes the form (given in [7]):

$$\omega = \int\limits_{\Sigma} d\sigma_\nu\,\partial_\nu\varphi \wedge \varphi \ . \tag{8}$$

Let us make a Fourier transformation of the function $\varphi(x)$ by the formulas (1). So far as the function $\varphi(x)$ satisfies the equation (7), its Fourier-transform $\widetilde{\varphi}(k)$ can be represented as:

$$\widetilde{\varphi}(k) = 2\pi\,\delta(k^2 - m^2)\cdot a(k) \ , \tag{9}$$

where $a(k)$ is a usual function defined on the mass surface $k^2 = m^2$.

Performing Fourier transformation of the symplectic structure (8) we have:

$$\omega^{\dot{-}\,;\,\dot{-}} = \int d\mu_m \cdot i\,\varepsilon(k)\cdot a(-k)\dot{-}\, a(k)\dot{-} \ , \qquad \text{here } \ d\mu_m = \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\cdot 2\pi\,\delta(k^2 - m^2) \ . \tag{10}$$

Here integrated function is a usual product of numbers[5]. It is implied that arguments in the right part follow in the same order as in the left.

Now in order to calculate the Poisson bracket of two field values $\{\,\widetilde{\varphi}(k)\,,\,\widetilde{\varphi}(k')\,\}$, according to the formula (6), let us consider the vector $\underline{I\widetilde{\varphi}(k')}$. From the formulas (4) and (10) we have that for any vector $\underline{c}$:

$$\int d\mu_m \cdot i\,\varepsilon(k)\cdot a(-k)^{\underline{c}}\, a(k)^{\underline{I\widetilde{\varphi}(k')}} = \widetilde{\varphi}(k')^{\underline{c}} \ .$$

[3] Rigorously speaking, we can talk about such an isomorphism only after discussing the topology of the invariant phase space. Without such a discussion even the notion of cotangent bundle does not have a clear sense. For the reasons explained in "Introducing remarks" discussion of this question for the case of relativistic fields we postpone to paper [VI].

It should be also kept in mind that values like $\varphi(x)$ that we use here appear to be not belonging to cotangent bundle after we introduce the proper topology. This shortcoming can be easily eliminated, but prefer just to ignore it till discussion of the topology.

[4] We prefer to avoid complexification of Z, because this space can be considered as the set of *physical* states existing in nature. The space $Z^*_{\mathbb{C}}$ can be considered as the set of *mathematical* values that we use to describe physical states.

[5] If we denote $d\mu^+_m = d\mu_m\cdot\theta(k)$, the formula (10) can be written with external product of forms:

$$\omega = \int d\mu^+_m \cdot i\,a^*(k)\wedge a(k) \ .$$

Using linear independence of the form $a(k)\dot{-}$ with different values of k, $k^2 = m^2$, and the definition of this form (9), we get that the vector $\underline{I\widetilde{\varphi}(k')}$ satisfies the following equation:

$$a(k)\underline{I\widetilde{\varphi}(k')} = -\,i\,\varepsilon(k)\cdot(2\pi)^4\delta(k+k')\ .$$

Therefore, using the formula (6), for the Poisson bracket we have:

$$\{\,\widetilde{\varphi}(k)\,,\,\widetilde{\varphi}(k')\,\} = -\Big[\,i\,\varepsilon(k)\cdot 2\pi\,\delta(k^2-m^2)\Big]\cdot(2\pi)^4\delta(k+k')\ . \tag{11}$$

Sometimes it is useful to have an analogous relation in coordinate representation. In order to get it we make the Fourier transformation of the formula (11) with respect to the arguments k and k' :

$$\{\,\varphi(x)\,,\,\varphi(x')\,\} = -D_m(x-x')\ .$$

Here function $D_m(y)$ is:

$$D_m(y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,e^{-iky}\cdot\Big[\,i\,\varepsilon(k)\cdot 2\pi\,\delta(k^2-m^2)\Big]\ . \tag{12}$$

5. “Physical” electromagnetic field. Let us choose the Lagrangian of electromagnetic field gauge-invariant:

$$L = -\tfrac{1}{4}\,F_{\mu\nu}\,F_{\mu\nu} = -\,^{[\mu\nu]}\,\partial_\mu A_\nu\,\partial_\mu A_\nu\ , \qquad \text{here}\ \ F_{\mu\nu} = {}^{[\mu\nu]}\,2\,\partial_\mu A_\nu\ . \tag{13}$$

The equations of the motion (2) take the form (the second Maxwell equation):

$$\partial_\mu F_{\mu\nu} = 0\ . \tag{14}$$

In this case it is convenient to define the invariant phase space Z^{phys} as the set of functions $F_{\mu\nu}(x)$ that satisfy the equation (14). The value of vector potential A_μ in a fixed point x is not a well-defined function on Z^{phys} : an expression like $A_\mu(x)\dot{-}$ has no sense if we do not say which gauge we use. For this reason, it is impossible to give any one-valued formula for the Poisson bracket of vector potential.

The symplectic structure (3) in this case takes the form (shown in [8, 10]):

$$\omega = -\int\limits_\Sigma d\sigma_\mu\,F_{\mu\nu}\wedge A_\nu\ . \tag{15}$$

It is appropriate to mention that, though the form ω is written with using gauge-dependent value A_ν, it is still gauge-independent, of course.

Let us now choose the vector potential A_μ so that it satisfies the Lorentz condition $\partial_\nu A_\nu = 0$. According to the equation (14), it will also satisfy the D'Alembert equation: $\partial^2 A_\mu = 0$. Let us split the expression (15) into two terms:

$$\omega = -\int\limits_\Sigma d\sigma_\mu\,\partial_\mu A_\nu\wedge A_\nu + \int\limits_\Sigma d\sigma_\mu\,\partial_\nu A_\mu\wedge A_\nu\ .$$

The second integral is equal to zero. We can check it in the following way. First, from the Lorentz condition and antisymmetry of external product we have that the integrated function is a conserved current: $\partial_\mu(\partial_\nu A_\mu\wedge A_\nu) = 0$. Therefore in the second integral, independently from the first, we can integrate on the surface $t = 0$ instead of integration on Σ. So, we get the integral:

$$\int d^3\boldsymbol{x}\,\partial_\nu A_0\wedge A_\nu\ .$$

Using the Lorentz condition we can write it as:

$$\int d^3\boldsymbol{x}\,\partial_\nu(A_0\wedge A_\nu)\ .$$

But $A_0\wedge A_0 = 0$. Therefore the summation by index ν can be performed just from 1 to 3. We get:

$$\int d^3\boldsymbol{x}\,\partial_n(A_0\wedge A_n)\ .$$

This integral is an integral of the three-dimensional vector $A_0 \wedge A_n$. By Ostrogradsky-Gauss divergence theorem, it is equal to the flux of this vector through a far two-dimensional closed surface. This flux is equal to zero because the vector potential is implied to be chosen so that it is equal to zero there.

So, under the Lorentz condition $\partial_\nu A_\nu = 0$, the symplectic structure (15) can be written in the following way:

$$\omega = -\int\limits_{\Sigma} d\sigma_\mu \, \partial_\mu A_\nu \wedge A_\nu \; . \tag{16}$$

Let us make the Fourier transformation (1) of functions $A_\mu(x)$ and $F_{\mu\nu}(x)$. Similarly to the case of the scalar field we can write these Fourier transforms as:

$$\widetilde{A}_\mu(k) = 2\pi\,\delta(k^2) \cdot a_\mu(k) \; , \qquad \widetilde{F}_{\mu\nu}(k) = 2\pi\,\delta(k^2) \cdot f_{\mu\nu}(k) \; .$$

Here $a_\mu(k)$ and $f_{\mu\nu}(k)$ are usual functions defined on the light cone $k^2 = 0$.

The symplectic structure (16) in the Fourier representation takes the form[6]:

$$\omega^{\div;\div} = -\int d\mu_m \cdot i\,\varepsilon(k) \cdot a_\nu(-k)^{\div}\, a_\nu(k)^{\div} \; . \tag{17}$$

The formulas (16) and (17) look very similar to the corresponding formulas (8) and (10) for the scalar field. More rigorously, they look like formulas for the symplectic structure of four scalar fields. But it is important to understand that the invariant phase space Z^{phys} introduced in this section is not a direct sum of phase spaces of four scalar fields. For this reason, as we mentioned above, it is impossible to calculate the Poisson bracket for vector potential.

Consider now the structure of the space Z^{phys} in Fourier representation. This space can be considered as the set of functions $a_\mu(k)$ on the light cone $k^2 = 0$ satisfying the Lorentz condition $-\,i\,k_\mu\, a_\mu(k) = 0$ and considered accurate up to the gauge transformation:

$$a_\mu(k) \;\sim\; a_\mu(k) - i\,k_\mu\,\lambda(k) \; .$$

From here and from the formula (17) we see that the symplectic structure on the space Z^{phys} is not degenerate.

Now it is clear that, though it is impossible to calculate the Poisson brackets for components of vector potential, it is possible to calculate the brackets $\{\, \widetilde{F}_{\mu\rho}(k) \, , \, \widetilde{F}_{\nu\sigma}(k') \,\}$ and $\{\, F_{\mu\rho}(x) \, , \, F_{\nu\sigma}(x') \,\}$. Nevertheless, we postpone this problem till the section 11.

6. Heisenberg-Pauli term. After the paper of Heisenberg and Pauli [14] when quantum theory of electromagnetic field is discussed it is customary to change the Lagrangian adding to it an additional term $\frac{\varepsilon}{2}\,(\partial_\mu A_\mu)^2$. For such a step in modern textbooks there are many different "explanations". Generally they can be divided into two types.

The first type are "explanations" appealing to formal difficulties of using the Hamiltonian formalism and watching relativistic invariance. As we have shown in the section 5, even if there were any difficulties, they disappear, if we use the invariant Hamiltonian formalism.

The second type are "explanations" appealing to quantum theory in some way. Now our first goal is to explain that the reasons for changing the Lagrangian exist even in the classical theory.

At first sight, the term $\frac{\varepsilon}{2}\,(\partial_\mu A_\mu)^2$ only fixes the gauge: if the Lorentz condition was satisfied in the past, it will be satisfied in the future. But actually there is a more deep consequence: when we develop scattering theory and perturbation theory we get the opportunity to get rid of such a fiction as separation of field to "own" field of particles and "radiation".

Indeed, it is impossible in practice to solve a dynamic problem exactly. So, we calculate first some first approximation and then we calculate radiative corrections. In order to take into account radiative recoil we have to divide field into "own" and "radiative" in some way. But it is impossible to do it rigorously even in simplest situations. It is not surprising, because in the Lagrangian formalism there is no hint of such a separation.

[6] Using an external product we can write it as:

$$\omega = -\int d\mu_m^{+}\, i\, a_\nu^{*}(k) \wedge a_\nu(k) \; .$$

But we can approach problems of scattering differently. Consider, for example, scattering of two particles interacting with each other by electromagnetic field. Let us use some naive mechanical analogy: for example, two heavy balls sliding on a smooth elastic membrane. Membrane corresponds to electromagnetic field.

If we do not divide the field into own and radiation we have to accept that all field is "created" by particles. In order to formalize such an approach we have to introduce turning interaction on and off.

The process of scattering of particles and of electromagnetic field then can be described in the following way:

1. In the far past the particles are free and they do not interact with the field. There exists also the field and it is far from the particles.
2. Then, while particles are far from each other, we turn on interaction adiabatically. The particles put on their field at this stage.
3. After interaction is fully turned on particles (and field) run to each other near, interact and then run away from each other.
4. When they are far enough we turn interaction off adiabatically.
5. Then there remain only bare particles, and there is no field near them, and free field which is not connected with the particles.

It is obvious for balls sliding on an elastic membrane how to turn on and off interaction: it is necessary to turn on and off the gravitation. But in the case of electromagnetic field we can not do anything so simple. Consider, for example, interaction of electromagnetic field $A_\mu(x)$ with a given current $J_\mu(x)$. The Lagrangian in this case takes the form:

$$L = -\tfrac{1}{4}\, F_{\mu\nu}\, F_{\mu\nu} - \alpha\, J_\mu\, A_\mu \ . \tag{18}$$

Here $\alpha(x)$ is a function that turns on and off interaction. In order to write formulas shorter we will use a notation:

$$J^\alpha_\mu(x) = \alpha(x)\, J_\mu(x) \ .$$

From the Lagrangian (18) we get the equation of the motion:

$$\partial_\mu F_{\mu\nu} = J^\alpha_\nu \ . \tag{19}$$

Applying to both sides the operation ∂_ν we see that, if $\partial_\nu J^\alpha_\nu \neq 0$, the equation (19) does not have any solutions. So, the interaction can not be turned on and off.

But if we add to the Lagrangian the term $\frac{\varepsilon}{2}\,(\partial_\mu A_\mu)^2$, i. e. use the Lagrangian

$$L = -\tfrac{1}{4}\, F_{\mu\nu}\, F_{\mu\nu} + \tfrac{\varepsilon}{2}\,(\partial_\mu A_\mu)^2 - J^\alpha_\mu\, A_\mu \ ,$$

then the equation of the motion takes the form:

$$\partial_\mu F_{\mu\nu} - \varepsilon\, \partial_\nu \partial_\mu A_\mu = J^\alpha_\nu \ , \tag{20}$$

and solution $A_\mu(x)$ can be easily found for any function $\alpha(x)$.

Later we will always imply that $\varepsilon = -1$. In such a case the equation (20) takes especially simple form:

$$\partial^2 A_\nu = J^\alpha_\nu \ . \tag{21}$$

Its solution is the Liénard-Wiechert potential. For this reason this "gauge" should be called the Liénard-Wiechert gauge. Nevertheless, in quantum electrodynamics it is called the Feynman gauge.

If we calculate a four-dimensional divergence of both parts of equation (21), we get:

$$\partial^2(\partial_\nu A_\nu) = \partial_\nu J^\alpha_\nu \ .$$

It can be shown from here that, if interaction is turned on and off adiabatically and the Lorentz condition $\partial_\nu A_\nu = 0$ took place in the far past, then it will take place everywhere.

From this we also see that the additional term $\frac{1}{2}\,(\partial_\mu A_\mu)^2$ in the Lagrangian will make a zero contribution in the variation of action. Therefore in the region, where interaction is completely turned on, the system of particles and fields will satisfy the same equations of motion as the system with no additional term in the Lagrangian.

So, introduction of the additional term in the Lagrangian does not substantially change the scattering. But it allows to avoid separation of "own" field of particles and allows to construct a local perturbation theory.

It is difficult to say now, how far we can go in constructing of perturbation theory for classical electrodynamics. But it is apparent that without introduction of the additional term in Lagrangian situation would be completely hopeless.

7. "Non-physical" electromagnetic field. Now consider again the free electromagnetic field, but include already in Lagrangian the term $-\frac{1}{2}\,(\partial_\mu A_\mu)^2$. Then the Lagrangian can be written in the following way:

$$L = -\,\tfrac{1}{4}\,F_{\mu\nu}\,F_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}\,(\partial_\mu A_\mu)^2 = -\,\tfrac{1}{2}\,\partial_\mu A_\nu\,\partial_\mu A_\nu + \tfrac{1}{2}\,\partial_\mu(A_\nu\,\partial_\nu A_\mu - A_\mu\,\partial_\nu A_\nu)\ .$$

As we will show in the paper [II] the term that is a full divergence can be thrown off. After that the Lagrangian takes especially simple form:

$$L = -\,\tfrac{1}{2}\,\partial_\mu A_\nu\,\partial_\mu A_\nu\ ,$$

i. e. it is in fact the Lagrangian of four scalar fields[7] with $m = 0$ considered in the section 4. The equation of the motion has the form:

$$\partial^2 A_\mu = 0\ .$$

Now the invariant phase space is a direct sum of four phase spaces of scalar fields. Let us denote it as Z^4 . The symplectic structure in coordinate and Fourier representations is given by formulas:

$$\omega = -\int\limits_\Sigma d\sigma_\mu\,\partial_\mu A_\nu \wedge A_\nu\ . \tag{22}$$

$$\omega^{\dot{-};\dot{-}} = -\int d\mu_m \cdot i\,\varepsilon(k)\cdot a_\nu(-k)^{\dot{-}}\,a_\nu(k)^{\dot{-}}\ . \tag{23}$$

The formulas (22) and (23) look the same as corresponding formulas from the section 5. But the difference in their meaning is important: now we can calculate the Poisson bracket for the vector potential. In Fourier representation it has the form:

$$\{\,\widetilde{A}_\mu(k)\,,\,\widetilde{A}_\nu(k')\,\} = g_{\mu\nu}\cdot\Big[\,i\,\varepsilon(k)\cdot 2\pi\,\delta(k^2)\Big]\cdot(2\pi)^4\delta(k+k')\ . \tag{24}$$

In coordinate representation:

$$\{\,A_\mu(x)\,,\,A_\nu(x')\,\} = g_{\mu\nu}\,D_0(x-x')\ . \tag{25}$$

Here $D_0(y)$ is the function (12) with $m = 0$. In this case it can be written just as:

$$D_0(y) = \frac{1}{2\pi}\,\varepsilon(y)\,\delta(y^2)\ .$$

Let us apply to both sides of the formula (24) symbol ${}^{[\rho\mu]}\,2\,(-\,i\,k_\rho)\,{}^{[\sigma\nu]}\,2\,(-\,i\,k'_\sigma)$. We get the formula for the Poisson bracket of the tensor of electromagnetic field in the Fourier representation:

$$\{\,\widetilde{F}_{\mu\rho}(k)\,,\,\widetilde{F}_{\nu\sigma}(k')\,\} = {}^{[\mu\rho]\;[\nu\sigma]}\,4\,g_{\mu\nu}\,k_\rho\,k_\sigma\cdot\Big[\,i\,\varepsilon(k)\cdot 2\pi\,\delta(k^2)\Big]\cdot(2\pi)^4\delta(k+k')\ . \tag{26}$$

In the coordinate representation this relation can be written in the following way:

$$\{\,F_{\mu\rho}(x)\,,\,F_{\nu\sigma}(x')\,\} = -\,{}^{[\mu\rho]\;[\nu\sigma]}\,4\,g_{\mu\nu}\,\partial_\rho\,\partial_\sigma D_0(x-x')\ . \tag{27}$$

Here both derivatives are taken with respect to the argument without dash.

It should be mentioned already that formulas (26) and (27) are the same as formulas for the Poisson brackets of the "physical" electromagnetic field described in the section 5. It will be proven in the section 11.

8. Energy of electrostatic field. In the paper [III] we will get a formula that can be used in the invariant Hamiltonian formalism for obtaining generators of the Poincare group. With its help we easily get the formula for the momentum of the "non-physical" electromagnetic field:

$$P_\nu = -\int d\mu_m^+\cdot k_\nu\,a_\rho^*(k)\,a_\rho(k)\ . \tag{28}$$

From this formula we see that the energy of the "non-physical" field is not positive-definite. And what is more, it follows from this formula that the energy stored in electrostatic field created by a system of fixed charges is always *negative*.

[7]The term corresponding to the field with index $\nu = 0$ is included with negative sign.

Here we will discuss this paradox with some details. This is necessary because it was usually incorrectly treated in the frame of *quantum* theory (see, for example, [16, 17, 18, 19]).

The problem of negativity of energy of "time" photons in quantum electrodynamics was noted a long time ago. It was supposed that quantization in the space with indefinite scalar product allows change the sign of this energy. And it was considered as an argument for introduction of indefinite scalar product. It seemed so because, if we use indefinite scalar product in quantum case, it is not quite clear what we should call the energy of a state: the average value of the Hamiltonian or its eigenvalue. This vagueness, of course, appeared because, first, there was no clear conception of quantization, and second, classical theory was not formulated in the appropriate way.

But from our consideration it is clear that the discussed energy *must* be negative: only such value looks natural from the point of view of relativistic theory. And indefiniteness of metric in quantum case has no relation to this question.

It should be also noted here that the notion of vacuum of a field we do not connect in any way with minimum of energy. The vacuum of a classical field is just the zero vector of the space Z . A notion of vacuum of a quantum field we will introduce in description of quantization in the paper [VI].

But what can we say now about the positiveness of electrostatic energy which is well-known in the usual electrostatics? The fact is that this notion implies usually a different meaning: it usually imply the work that the system can make, if charges will be split in infinite small parts and they will be carried far away from each other. But the formula (28) gives the energy that remains in the field, if its interaction with the charges is instantly turned off.

We will not discuss this question in more details here. But let us notice the following. In electrostatics there is the formula for energy:

$$E^{\,\mathrm{full}} = \tfrac{1}{2} \int \varphi \, dQ \ .$$

The multiplier $\frac{1}{2}$ is usually explained so that, if we use the formula for the energy in external field, we count the mutual energy of two charges two times.

But in the frame of the theory that we discuss here the field is always considered as external. Therefore, we can say that the energy of charges is always given by the formula:

$$E^{\,\mathrm{charges}} = \int \varphi \, dQ \ .$$

We have to add to it the energy of the field:

$$E^{\,\mathrm{field}} = -\tfrac{1}{2} \int \varphi \, dQ \ .$$

The sum of $E^{\,\mathrm{charges}}$ and $E^{\,\mathrm{field}}$ is exactly $E^{\,\mathrm{full}}$.

9. Scattered states of "non-physical" field. Consider now scattering of the "non-physical" field on a given current. As it was explained in the section 6, we will suppose that the interaction with electromagnetic field is turned on and off adiabatically and the particles constituting the current are accelerated only in the region of space-time where the interaction is fully turned on, i. e. $\alpha(y) = 1$.

In an arbitrary point of space-time the field will consist of two components: the field that existed in the far past and the field created by the particles. This additional field can be calculated with the Liénard-Wiechert formula:

$$A^{\mathrm{ret}}_{\mu}(x) = \int d^4x' \, D^{\mathrm{c}}_0(x - x') \, J^{\alpha}_{\mu}(x') \ , \qquad \text{here} \ \ D^{\mathrm{c}}_0(y) = \theta(y) \, D_0(y) \ . \tag{29}$$

In the invariant Hamiltonian formalism a state of a field implies a solution of the corresponding homogeneous equation. In our case this is the equation $\partial^2 A_\mu = 0$. Therefore when we talk about a state of the field in the far past or in the far future it is natural to continue the function $A_\mu(x)$ by the homogeneous equation to the whole space. So, we come to the definition of the in- and out- fields: $A_\mu(x)^{\underline{\mathrm{in}}}$ and $A_\mu(x)^{\underline{\mathrm{out}}}$. Here $\underline{\mathrm{in}}$ and $\underline{\mathrm{out}}$ are vectors of the invariant phase space Z^4 . It is natural to call these vectors in- and out- states. The difference of these two vectors corresponds to the radiated field:

$$\underline{\mathrm{out}} - \underline{\mathrm{in}} = \underline{\mathrm{rad}} \ .$$

In order to find the field $A_\mu(x)^{\underline{\mathrm{rad}}}$ we have just to make a minor correction in the Liénard-Wiechert formula (29):

$$A_\mu(x)^{\underline{\mathrm{rad}}} = \int d^4x' \, D_0(x - x') \, J^{\alpha}_{\mu}(x') \ .$$

In the Fourier-representation this formula can be written in an especially simple way:

$$\widetilde{A}_\mu(k)\,\underline{\mathrm{rad}} = i\,\varepsilon(k)\cdot 2\pi\,\delta(k^2)\cdot \widetilde{J}^\alpha_\mu(k)\ ,$$

or, with using non-singular function $a_\mu(k)$ on the light cone, even shorter:

$$a_\mu(k)\,\underline{\mathrm{rad}} = i\,\varepsilon(k)\,\widetilde{J}^\alpha_\mu(k)\ . \tag{30}$$

We see that in the given formulas we can approach to the adiabatic limit. The set of all possible vectors $\underline{\mathrm{rad}}$ forms a linear subspace of the invariant phase space Z^4 . Let us denote this space $Z^\perp$. As it was explained in the section 6, if the interaction is turned on and off adiabatically, the Lorentz condition is not broken. Therefore the space $Z^\perp$ does not coincide with the whole Z^4 . On the other hand, it follows from the formula (30) that there is no other condition that restricts the space $Z^\perp$. So, $Z^\perp$ is the subspace of the space Z^4 defined by the Lorentz condition:

$$\underline{\mathrm{rad}} \in Z^\perp \quad\Longleftrightarrow\quad -\,i\,k_\mu\,a_\mu(k)\,\underline{\mathrm{rad}} = 0\ . \tag{31}$$

This explains the notation $Z^\perp$.

It is natural to believe that all possible in-states were created from the vacuum by interaction with currents. Then vectors of in- and out- fields also lie in the subspace $Z^\perp$. So far as all possible radiation fields fill the whole $Z^\perp$, all possible in- and out- fields also fill the whole $Z^\perp$.

Using the condition (31) and the formula (28) for the energy-momentum vector we see that the states from the space $Z^\perp$ have non-negative energy.

10. Remainders of gauge invariance. Consider now such a vector $\underline{\mathrm{gauge}} \in Z$ that the function $a_\mu(k)\,\underline{\mathrm{gauge}}$ can be written as:

$$a_\mu(k)\,\underline{\mathrm{gauge}} = -\,i\,k_\mu\,\lambda(k)\ ,$$

where $\lambda(k)$ is some function on the light cone. The set of all vectors of this type form a linear subspace in Z^4 . Let us denote this space $Z^\parallel$. It is obvious that $Z^\parallel$ lies in $Z^\perp$.

Consider again the scattering of particles and field when the motion of particles is not given and there is, generally, non-zero in-field. This scattering is described by the Lagrangian:

$$L = L^{\mathrm{particles}} - \tfrac{1}{2}\,\partial_\mu A_\nu\,\partial_\mu A_\nu - \alpha\,J_\mu\,A_\mu\ .$$

Let us suppose that the corresponding equations of motion are solvable and trajectories of particles and field $A_\mu(x)$ that make action stationary are found. Let us also suppose that adiabatic turning on (off) of interaction is made in so far past (future) that all particles are far from each other and the field $A_\mu(k)\,\underline{\mathrm{in}}$ ($A_\mu(k)\,\underline{\mathrm{out}}$) is far from all particles and the field $A_\mu(k)\,\underline{\mathrm{gauge}}$ is also far from all particles.

Let us add to the field $A_\mu(x)$ the field $A_\mu(x)\,\underline{\mathrm{gauge}}$. Or, in other words, let us make the gauge transformation:

$$A_\mu(x) \to A_\mu(x) + \partial_\mu\Lambda(x)\ , \tag{32}$$

where $\Lambda(x)$ is a function whose Fourier transform is connected with $\lambda(k)$ by relation:

$$\widetilde{\Lambda}(k) = 2\pi\,\delta(k^2)\cdot\lambda(k)\ .$$

In the region where interaction is turned on and off this addition can not influence the stationarity of action. Indeed, so far as the particles are outside of the region where this addition is present, variations of terms $L^{\mathrm{particles}}$ and $-\,\alpha\,J_\mu\,A_\mu$ can not change. Furthermore, the term $-\,\frac{1}{2}\,\partial_\mu A_\nu\,\partial_\mu A_\nu$ differs from the gauge-invariant by the full divergence, which can not change the variation, and by the term $-\,\frac{1}{2}\,(\partial_\mu A_\mu)^2$, which has a zero variation, because $\partial_\mu A_\mu = 0$.

Consider now the region, where interaction is fully turned on. The transformation (32) can not change the variations of the terms $L^{\mathrm{particles}}$ and $-\,\frac{1}{2}\,\partial_\mu A_\nu\,\partial_\mu A_\nu$ for the same reasons that in the case of the regions where the interaction is turned on and off. There remains the term $-\,J_\mu\,A_\mu$. Under the gauge transformation (32) it becomes $-\,J_\mu\,A_\mu -\,J_\mu\,\partial_\mu\Lambda(x)$. Therefore, in the variation of the action we get the additional term $-\,\delta J_\mu\,\partial_\mu\Lambda(x)$. Integrating it by parts and using conservation of the current we get that it does not add anything to the variation.

So, under the transformation (32) motions that satisfy the condition of stationarity of action are transformed to the motions that also satisfy this condition. It is possible to say that the space $Z^\parallel$ does not participate in scattering at all.

It is natural to suppose that the scattered states of electromagnetic field are observed only by their influence on charged particles. Then any two vectors from $Z^{\perp}$ that differ by vector from $Z^{\parallel}$ are physically indistinguishable. Therefore, instead of using the space $Z^{\perp}$, we can use the factor-space $Z^{\perp/\parallel} = Z^{\perp}/Z^{\parallel}$.

Notice now that in the Fourier representation the space $Z^{\perp/\parallel}$ can be considered as the set of functions $a_\mu(k)$ on the light cone $k^2 = 0$ satisfying the Lorentz condition $-i\,k_\mu\,a_\mu(k) = 0$ and considered accurate up to the gauge transformation:

$$a_\mu(k) \;\sim\; a_\mu(k) - i\,k_\mu\,\lambda(k)\;.$$

Therefore, we can establish the natural one-to-one correspondence between elements of the spaces $Z^{\perp/\parallel}$ and Z^{phys}.

And what is more, the space $Z^{\perp/\parallel}$ naturally inherits from the full space Z^4 the symplectic structure (23), and this structure obviously is the same as the symplectic structure of the space Z^{phys} given by the formula (17). So, $Z^{\perp/\parallel}$ and Z^{phys} are also naturally identified as *symplectic* spaces.

11. About the Poisson bracket on $Z^{\perp/\parallel}$. Consider now on the space Z^4 a linear function $\widetilde{F}_{\mu\rho}(k)\dot{-}$ (or $F_{\mu\rho}(x)\dot{-}$). And let us suppose k (or, correspondingly, x) to be fixed. As we have said in the section 3, this function is a generator of a vector field on Z^4.

Notice, first, that so far as the function under consideration is linear on Z^4, its differential does not depend on the point of the space Z^4 (and is identical with the function). Therefore the obtained vector field is constant on the whole space Z^4.

Second, differential of the function under consideration, like the function, is zero on $Z^{\parallel}$. Therefore, as it is seen from the formula for symplectic structure (23), the vector of the obtained constant vector field belongs to the subspace $Z^{\perp}$.

From these two statements we get that the obtained field can be naturally restricted to the factor-space $Z^{\perp/\parallel}$.

On the other hand, the space $Z^{\perp/\parallel}$ has its own symplectic structure. If we restrict the function $\widetilde{F}_{\mu\rho}(k)\dot{-}$ (or $F_{\mu\rho}(x)\dot{-}$) to this factor-space, the obtained function will be a generator of some vector field in $Z^{\perp/\parallel}$.

But, so far as the symplectic structure in $Z^{\perp/\parallel}$ is inherited from Z^4 we can see that both vector fields in $Z^{\perp/\parallel}$ are identical.

From here we also get that the formulas (26) and (27) obtained in the section 7 for the "non-physical" field work for the "physical" field also.

References

[1] V. A. Fock "Konfigurationsraum und zweite Quantelung", Z. Phys. **75**, 622-647 (1932). [in Russian: „Konfiguratsionnoe prostranstvo i vtorichnoe kvantovanie", in [2], pages 25-51.]

[2] V. A. Fock *„Raboty po kvantovoy teorii polya"*, L.: izd-vo LGU (1957).

[3] S. Weinberg *"The quantum theory of fields"*, v. 1: *"Foundations"*, Cambridge univ. press (1996).

[4] N. Bohr, L. Rosenfeld "Zur Frage der Messbarkeit der elektromagnetischen Feldgrössen", Kgl. Danske Vidensk. Selskab., Math.-Fys. Medd. **12**(8), 3-65 (1933). [in Russian: „K voprosu ob izmerimosti elektromagnitnogo polya", in: [5], v. 2, pages 120-162.]

[5] N. Bohr *„Izbrannye nauchnye trudy"*, v. 2, M.: Nauka (1971).

[6] V. I. Ogievetski, L. Mezinchesku „Simmetriya mezhdu bozonami i fermionami i superpolya", UFN **117**(4), 637-683 (1975).

[7] E. Witten "Interacting field theory of open superstrings", Nucl. Phys. **B276**, 291-324 (1986).

[8] Č. Crnković "Symplectic geometry and (super-) Poincaré algebra in geometrical theories", Nucl. Phys. **B288**, 419-430 (1987).

[9] G. J. Zuckerman "Action principles and global geometry", in *Mathematical aspects of string theory*, ed. S. T. Yau, Singapore: World scientific, 259-284 (1987).

[10] Č. Crnković, E. Witten "Covariant description of canonical formalism in geometrical theories", in *Three hundred years of gravitation*, eds. S. W. Hawking, W. Israel, Cambridge: Cambridge univ. press, 676-684 (1987).

[11] Č. Crnković "Symplectic geometry of the covariant phase-space", Class. Quant. Grav. **5**(12), 1557-1575 (1988).

[12] G. Barnich, M. Henneaux, C. Schomblond "Covariant description of the canonical formalism", Phys. Rev. D **44**(4), R939-R941 (1991).

[13] V. I. Arnold *„Matematicheskie metody klassicheskoy mekhaniki"*, M.: Nauka (1989).

[14] W. Heisenberg, W. Pauli "Zur Quantendynamik der Wellenfelder", Z. Phys. **56**(1/2), 1-61 (1929). [in Russian: „K kvantovoy dinamike volnovykh poley", in [15], pages 30-88.]

[15] V. Pauli *„Trudy po kvantovoy teorii"*, M.: Nauka, v. 2 (1977).

[16] S. N. Gupta "Theory of longitudinal photons in quantum electrodynamics", Proc. Phys. Soc. A **63**(7), 681-691 (1950).

[17] S. N. Gupta "Quantum mechanics with an indefinite metric", Can. J. Phys. **35**(8), 961-968 (1957).

[18] K. Nad' *„Prostranstva sostoyaniy s indefinitnoy metrikoy v kvantovoy teorii polya"*, M.: Mir (1969). [K. L. Nagy *"State vector spaces with indefinite metric in quantum field theory"*, Budapest: Académiai Kiadó (1966).]

[19] R. Haag *"Lectures in theoretical physics"*, Sommer Institute for Th. Phys., Boulder, New York (1961). (cited from [18])

arXiv:math-ph/0402003v1 4 Feb 2004

О квантовании электромагнитного поля. I. Классическая электродинамика.

Д. А. Арбатский*

7 февраля 2008 г.

Аннотация

Развивается методика исследования классических полей на основе инвариантного гамильтонова формализма. Электромагнитное поле, наряду со скалярным, выступает как частный пример применения общего метода. Вычисляются скобки Пуассона для этих полей. Разъясняется необходимость введения „нефизических“ степеней свободы для электромагнитного поля.

1. Вводные замечания. Данная статья является первой в серии из шести статей, объединённых общим заголовком. Ссылки на эти статьи будут здесь даваться римскими цифрами: [I], ..., [VI].

Одним из поводов для настоящего исследования явилась попытка ответить на вопрос о том, как устроено пространство состояний квантованного электромагнитного поля с точки зрения функционального анализа.

1. При изложении схемы квантования Гупты-Блейлера современные учебники молчаливо предполагают, что вопрос о топологии квантового пространства состояний у электромагнитного поля решается в полной аналогии с полем скалярным. При этом электромагнитное поле квантуется либо в обычном гильбертовом пространстве (такая конструкция не обладает даже неявной релятивистской инвариантностью [VI]), либо в „гильбертовом пространстве с индефинитной метрикой“ (при таком подходе вопрос о топологии до сих пор вообще не был исследован на должном уровне строгости; при этом фактически оказывается, что пространство состояний вообще не определялось конструктивно).

   В любом случае, основываясь на различных аналогиях, обычно считают, что пространство состояний, с *топологической* точки зрения, *должно* быть гильбертовым. Из нашего исследования станет ясно, что такая точка зрения ошибочна. Причём этот вывод является достаточно общим: он заставляет по-новому взглянуть и на квантование полей, с квантованием которых до сих пор всё как-будто было в порядке (например, скалярного).

2. Корень проблемы, как будет видно, лежит не в функциональном анализе, а в алгебре. Процесс квантования в пространстве Фока до сих пор не был описан удовлетворительно с *алгебраической* точки зрения. Дело в том, что, следуя за Фоком [1], для построения квантованного поля в качестве отправной алгебраической структуры берут одночастичное квантовое пространство. Но такая алгебраическая структура слишком бедна: не существует алгебраического процесса, позволяющего сконструировать на её основе поле квантовое (именно, опираясь только на структуру одночастичного подпространства, невозможно ввести локальные операторы поля (см., например, [3], гл. 5)).

   Как будет видно из настоящего исследования, подходящей алгебраической структурой для построения квантованного поля является классическое поле, описанное на языке инвариантного гамильтонова формализма.

3. После решения алгебраических вопросов (т. е. построения удовлетворительной схемы квантования) решение вопроса о топологии оказывается в значительной степени чисто технической проблемой. При этом важным оказывается осознание того факта, что при построении пространства состояний электромагнитного поля в любом случае приходится от гильбертова пространства отказаться. В статье [VI] для решения этой проблемы вводятся новые классы функциональных пространств.

*http://d-a-arbatsky.narod.ru/

4. Вопрос о релятивистской инвариантности предложенной здесь конструкции квантованного поля не встаёт. Дело в том, что эта конструкция не просто релятивистски-инвариантна: требование релятивистской инвариантности составляет основу самой конструкции.

   Если использовать приведённую здесь конструкцию для квантования гармонического осциллятора, то требование инвариантности квантования по отношению к некоторой группе в известном смысле заменяет требование о том, чтобы квантовое пространство состояний было гильбертовым. При этом квантований оказывается два: одно в гильбертовом пространстве и одно — в пространстве с индефинитным скалярным произведением.

   Таким образом, мы даже не делаем попытки как-либо обобщать теорему Стоуна-фон Неймана на случай релятивистских полей: вместо этого предложена принципиально иная концепция квантования, которая даже в случае квантования гармонического осциллятора работает *иначе*.

5. Поскольку наш подход к квантованию последовательно ориентирован на явное отслеживание симметрии (в случае релятивистских полей — по отношению к группе Пуанкаре), удаётся ясно проследить, каким образом действие группы симметрии переносится с классического пространства состояний на квантовое. Не будет преувеличением сказать, что именно в настоящих статьях впервые (на строгом уровне) раскрывается, каким образом у квантовой системы оказываются интегралы движения того же типа, что и у соответствующей классической системы (и связанные с наличием группы симметрии).

6. Ещё со времён классической работы Бора и Розенфельда [4] известно, что при рассмотрении полевых операторов в некоторой фиксированной точке пространства-времени возникают проблемы. В современных книгах, претендующих на математическую строгость, принято говорить, что мы имеем в этом случае дело с „операторным распределением“. Однако, насколько мне известно, никакой содержательной математической теории таких распределений (подобной теории обобщённых функций) дано не было. Поэтому термин „операторное распределение“ до сих пор всего лишь отражал тот факт, что символам вида $\hat{A}_\mu(x)$ вообще *никакого* смысла придать нельзя.

   При использовании инвариантного гамильтонова формализма в качестве основы для построения квантовых полей можно видеть, что проблема эта может быть исследована уже в классической механике, причём с гораздо большей ясностью.

   С точки зрения формальной, можно было бы полностью разобрать этот вопрос уже в данной статье. Тем более что строгий подход к вычислению скобок Пуассона всё равно требует обсуждения топологии инвариантного фазового пространства. Тем не менее этот вопрос я предпочёл оставить до последней статьи. Дело в том, что выбор топологии для инвариантного фазового пространства может быть ясно и просто *мотивирован* только после рассмотрения релятивистских полей с точки зрения теории групп [IV] и обсуждения квантования [VI].

7. Как известно, к лагранжиану поля можно добавлять некоторую дивергенцию, не меняя при этом уравнений движения. В статье [II] показано, что при этом не меняется и инвариантное гамильтоново описание поля. Поскольку предлагаемая схема квантования целиком базируется на структуре инвариантного гамильтонова формализма, получаемое в результате квантование также к замене лагранжиана нечувствительно.

8. Поскольку основой для построения квантованных полей у нас выступает классическое поле, а не одночастичное квантовое пространство, теория Вигнера-Макки (об унитарных представлениях группы Пуанкаре) у нас не играет фундаментальной роли. Аналогом этой теории является теория симплектических представлений группы Пуанкаре (в статье [IV] я попытался описать некоторые основы).

   Теория симплектических представлений группы Пуанкаре до известной степени похожа на теорию унитарных. Однако, пример электромагнитного поля как раз показывает, что полной аналогии здесь нет.

9. В своём изложении мы будем ориентироваться преимущественно на линейные вещественные бозе-поля. Требование линейности здесь принципиально: нелинейные поля мы квантовать не умеем. Что касается требований вещественности и того, чтобы поле было бозевским, то эти ограничения приняты здесь только для того, чтобы не усложнять обозначения и формулировки. „Комплексность“ поля означает просто наличие дополнительной комплексной структуры. Что касается фермиевских полей, то для их описания требуется использование грассмановых переменных (см., например, [6]). Используются ли обычные числа или грассмановы, для нашего рассмотрения не принципиально.

В данной статье даётся описание классического электромагнитного поля. Основная цель — изложить общеизвестные факты на новом языке. Впрочем, данный подход позволяет взглянуть на некоторые вопросы совершенно иначе: например, выясняется, что вопрос об энергии электростатического поля до сих пор трактовался неправильно.

2. Обозначения. В тензорных обозначениях мы будем записывать векторы пространства Минковского как a_μ , b_ν и т. п. При этом будут использоваться только *контравариантные* компоненты тензоров; индексы же, нумерующие их, будут писаться всегда *внизу*. Система координат всегда будет предполагаться ортонормированной относительно скалярного произведения $g(\cdot\,,\cdot)$, т. е. такой, что метрический тензор имеет стандартный вид: $g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}\,(+1,-1,-1,-1)_{\mu\nu}$. По повторяющимся тензорным индексам суммирование всегда проводится с учётом знаков. Например, скалярное произведение будет записываться как

$$a\,b = a_\mu\,b_\mu = g_{\mu\nu}\,a_\mu\,b_\nu = a_0\,b_0 - a_1\,b_1 - a_2\,b_2 - a_3\,b_3\ .$$

Производные по пространственно-временным координатам обозначаются символом ∂_μ :

$$\partial_\mu = \left(\ \tfrac{\partial}{\partial x_0}\ \middle|\ -\tfrac{\partial}{\partial x_1}\quad -\tfrac{\partial}{\partial x_2}\quad -\tfrac{\partial}{\partial x_3}\ \right)_\mu\ ,$$

т. е. индекс у производной, как и все индексы, является контравариантным.

Для сокращения обозначений введён символ антисимметризации вида ${}^{[\mu\nu]}$. Он означает, что по ближайшим следующим за ним индексам μ и ν проводится антисимметризация. Например, тензор электромагнитного поля записывается как $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = {}^{[\mu\nu]}\,2\,\partial_\mu A_\nu$.

Оператор Даламбера задаётся формулой: $\partial^2 = \partial_\mu\partial_\mu$.

Преобразование Фурье имеет всюду вид:

$$\widetilde{\varphi}(k) = \int d^4x\, e^{+ikx}\,\varphi(x)\ , \qquad \varphi(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\, e^{-ikx}\,\widetilde{\varphi}(k)\ . \tag{1}$$

Система единиц всюду такова, что $\hbar = c = 1$.

3. Инвариантный гамильтонов формализм. В работах [7, 8, 9] было показано, что базовым понятиям гамильтонова формализма (а именно, фазовому пространству и симплектической структуре на нём) можно придать релятивистски инвариантный смысл. Там же были получены формулы для симплектической структуры наиболее важных систем (в координатном представлении). Тем самым была заложена основа схемы, которую можно назвать инвариантным гамильтоновым формализмом. Подробное изложение имеется в оригинальных обзорах [10, 11]. Вопрос об эквивалентности этого подхода и обычной гамильтоновой механики в случае систем со связями обсуждался также в [12].

Здесь я напомню, однако, некоторые основные понятия. Это нужно для того, чтобы ввести наши собственные обозначения.

Пусть поле $\varphi_i(x)$ описывается лагранжианом $L(\varphi_i, \partial_\mu\varphi_i)$. Лагранжиан мы здесь будем считать зависящим только от самих полевых переменных φ_i и их производных[1], и не зависящим от точки x . Кроме того, мы будем иметь дело только с линейными полями, и лагранжиан будет считаться квадратичной функцией.

Принцип наименьшего действия приводит к уравнениям Эйлера-Лагранжа:

$$\frac{\partial L}{\partial\,\varphi_i} - \partial_\mu \frac{\partial L}{\partial\,(\partial_\mu\varphi_i)} = 0\ . \tag{2}$$

Инвариантное фазовое пространство Z определяется как множество всех функций[2] φ_i , которые удовлетворяют уравнениям (2). Поскольку мы предполагаем уравнение (2) линейным, пространство Z обладает естественной линейной структурой.

Элементы пространства Z будем обозначать подчёркнутыми наборами символов, например, $\underline{c} \in Z$. Функции на этом пространстве будем записывать как $f^{\,\underline{c}}$. Например, значение функции φ , отвечающей элементу $\underline{c}$, в точке x записывается как $\varphi(x)^{\underline{c}}$.

Мы будем, как правило, отождествлять элементы касательного расслоения TZ с элементами самого Z . Если, однако, необходимо указать, что касательный вектор $\underline{c}$ приложен в точке $\underline{b} \in Z$, то можно его записать как $\underline{c\,[b]}$. Элементы кокасательного расслоения T^*Z будут, аналогично, отождествляться с элементами

[1] Нам здесь достаточно будет ограничиться лагранжианами, зависящими только от производных первого порядка. В общем случае можно рассматривать и лагранжианы с высшими производными [12].

[2] Точнее, будем пока считать, что речь идёт о гладких функциях. Кроме того, будем считать, что эти функции отличны от нуля только на множестве, пересечение которого с любой пространственно-подобной плоскостью ограничено. В статье [VI] мы обсудим вопрос о естественной топологии пространства Z .

сопряжённого пространства Z^* . Дифференциалы линейных функций при этом отождествляются с самими функциями, т. е. вместо df пишем просто: f .

На инвариантном фазовом пространстве Z , так же, как и на обычном, имеется симплектическая структура ω :

$$\omega = \int\limits_{\Sigma} d\sigma_\mu \, \delta j_\mu(x) \ , \qquad \text{где} \ \ \delta j_\mu(x) = \frac{\partial L}{\partial\left(\partial_\mu \varphi_i\right)} \wedge \varphi_i \ . \tag{3}$$

Интегрирование ведётся по любой пространственно-подобной гиперповерхности Σ , не слишком плохо ведущей себя на бесконечности. 2-форма δj_μ называется симплектическим током. Поскольку симплектический ток сохраняется, результат от выбора поверхности Σ не зависит.

Произвол в выборе лагранжиана и возникающая отсюда неоднозначность симплектической структуры будут рассмотрены в статье [II]. В разумном смысле можно сказать, что неоднозначность в выборе лагранжиана не влияет на симплектическую структуру.

Симплектическая структура ω , как обычно [13], задаёт изоморфизм $I : T^*Z \to TZ$ кокасательного T^*Z и касательного TZ расслоений[3]. Он сопоставляет произвольной 1-форме $l^{\dot{-}} \in T^*Z$ касательный вектор $\underline{Il} \in TZ$ такой, что для любого касательного вектора $\underline{c} \in TZ$ выполняется равенство:

$$\omega^{\underline{c}\,;\,\underline{Il}} = l^{\underline{c}} \ . \tag{4}$$

Если форма $l^{\dot{-}}$ является дифференциалом некоторой функции $g^{\dot{-}}$, т. е. $l^{\dot{-}} = dg^{\dot{-}}$, то мы говорим, что $g^{\dot{-}}$ является генератором векторного поля $\underline{Il} = \underline{I\,dg}$.

Скобка Пуассона двух функций $f^{\dot{-}}$ и $g^{\dot{-}}$ определяется равенством:

$$\{\, f \,,\, g \,\} = df^{\,\underline{I\,dg}} \ . \tag{5}$$

Если же функции $f^{\dot{-}}$ и $g^{\dot{-}}$ линейны, то это определение можно записать просто как:

$$\{\, f \,,\, g \,\} = f^{\,\underline{Ig}} \ . \tag{6}$$

Здесь нам достаточно будет ограничиться вещественными полями, поэтому пространство Z будет вещественным линейным пространством. Однако, оказывается полезным рассматривать комплексные функции на фазовом пространстве. Их дифференциалы принадлежат комплексифицированному сопряжённому пространству. По этой причине вместо пространства Z^* , мы будем всегда использовать его комплексификацию $Z^*_{\mathbb{C}}$. Кроме того, при определении скобки Пуассона комплексных функций по формуле (5) приходится рассматривать комплексные векторы $\underline{I\,dg}$. Этого можно было бы избежать, определив скобки Пуассона несколько более абстрактно[4].

4. Скалярное поле. Рассмотрим скалярное поле. Его лагранжиан таков:

$$L = \tfrac{1}{2}\, \partial_\nu \varphi \, \partial_\nu \varphi - \tfrac{m^2}{2}\, \varphi^2 \ .$$

Уравнение движения (2) принимает вид (уравнение Клейна-Фока-Гордона):

$$\left(\partial^2 + m^2\right) \varphi = 0 \ . \tag{7}$$

Симплектическая структура (3) на инвариантном фазовом пространстве Z^{scal} в координатном представлении имеет вид (указанный ещё в [7]):

$$\omega = \int\limits_{\Sigma} d\sigma_\nu \, \partial_\nu \varphi \wedge \varphi \ . \tag{8}$$

[3]Строго говоря, о таком изоморфизме можно говорить только после обсуждения топологии инвариантного фазового пространства. Без такого обсуждения даже понятие кокасательного расслоения не имеет ясного смысла. По причинам, объяснённым в „Вводных замечаниях“ обсуждение этого вопроса для случая релятивистских полей мы оставляем до статьи [VI].

Также следует иметь в виду, что употребляемые здесь величины типа $\varphi(x)$ при введении надлежащей топологии оказываются не принадлежащими кокасательному расслоению фазового пространства. Этот недостаток легко устраним, но до обсуждения топологии мы предпочитаем просто не обращать на него внимания.

[4]Комплексификация Z представляется нежелательной, т. к. это пространство можно рассматривать как множество *физических* состояний, существующих в природе. Пространство $Z^*_{\mathbb{C}}$ при этом можно рассматривать как множество *математических* величин, используемых для описания физических состояний.

Совершим теперь преобразование Фурье функции $\varphi(x)$ по формулам (1). Поскольку функция $\varphi(x)$ удовлетворяет уравнению (7), её фурье-образ $\widetilde{\varphi}(k)$ можно представить в виде:

$$\widetilde{\varphi}(k) = 2\pi\,\delta(k^2 - m^2) \cdot a(k)\ , \tag{9}$$

где $a(k)$ — обычная функция, заданная на массовой поверхности $k^2 = m^2$.

Преобразуя теперь симплектическую структуру (8) в фурье-представление, имеем:

$$\omega^{\dot{-};\dot{-}} = \int d\mu_m \cdot i\,\varepsilon(k) \cdot a(-k)^{\dot{-}}\, a(k)^{\dot{-}}\ , \qquad \text{где}\ \ d\mu_m = \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \cdot 2\pi\,\delta(k^2 - m^2)\ . \tag{10}$$

Под знаком интеграла стоит обычное произведение[5]. Подразумевается, что в правой части формулы аргументы подставляются в том же порядке, в котором они следуют слева.

Чтобы теперь вычислить скобку Пуассона двух полевых величин $\{\,\widetilde{\varphi}(k)\,,\,\widetilde{\varphi}(k')\,\}$, согласно формуле (6), рассмотрим вектор $\underline{I\widetilde{\varphi}(k')}$. Из формул (4) и (10) имеем, что для любого вектора $\underline{c}$:

$$\int d\mu_m \cdot i\,\varepsilon(k) \cdot a(-k)^{\underline{c}}\, a(k)^{\underline{I\widetilde{\varphi}(k')}} = \widetilde{\varphi}(k')^{\underline{c}}\ .$$

Используя линейную независимость формы $a(k)^{\dot{-}}$ при различных k , $k^2 = m^2$, а также определение этой формы (9), отсюда получаем, что вектор $\underline{I\widetilde{\varphi}(k')}$ характеризуется соотношением:

$$a(k)^{\underline{I\widetilde{\varphi}(k')}} = -\,i\,\varepsilon(k) \cdot (2\pi)^4 \delta(k + k')\ .$$

Отсюда, по формуле (6), искомая скобка Пуассона равна:

$$\{\,\widetilde{\varphi}(k)\,,\,\widetilde{\varphi}(k')\,\} = -\Big[\,i\,\varepsilon(k) \cdot 2\pi\,\delta(k^2 - m^2)\Big] \cdot (2\pi)^4 \delta(k + k')\ . \tag{11}$$

Иногда бывает полезно иметь аналогичное соотношение в координатном представлении. Чтобы его получить, нужно в формуле (11) совершить преобразование Фурье по переменным k и k' :

$$\{\,\varphi(x)\,,\,\varphi(x')\,\} = -D_m(x - x')\ .$$

Здесь функция $D_m(y)$ имеет вид:

$$D_m(y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\, e^{-iky} \cdot \Big[\,i\,\varepsilon(k) \cdot 2\pi\,\delta(k^2 - m^2)\Big]\ . \tag{12}$$

5. „Физическое“ электромагнитное поле. Выберем лагранжиан электромагнитного поля калибровочно-инвариантным:

$$L = -\tfrac{1}{4}\, F_{\mu\nu}\, F_{\mu\nu} = -\,^{[\mu\nu]}\, \partial_\mu A_\nu\, \partial_\mu A_\nu\ , \qquad \text{где}\ \ F_{\mu\nu} = {}^{[\mu\nu]}\, 2\,\partial_\mu A_\nu\ . \tag{13}$$

Уравнение движения (2) принимает вид (второе уравнение Максвелла):

$$\partial_\mu F_{\mu\nu} = 0\ . \tag{14}$$

Под инвариантным фазовым пространством Z^{phys} в данном случае удобно понимать множество функций $F_{\mu\nu}(x)$, удовлетворяющих уравнению (14). При этом значение векторного потенциала A_μ в данной точке x не является хорошо определённой функцией на Z^{phys} : запись вида $A_\mu(x)^{\dot{-}}$ не имеет смысла, пока не указано, какая калибровка имеется в виду. По этой причине никакой однозначной формулы для скобок Пуассона от векторного потенциала написать нельзя.

Симплектическая структура (3) в данном случае имеет вид (указанный ещё в [8, 10]):

$$\omega = -\int\limits_{\Sigma} d\sigma_\mu\, F_{\mu\nu} \wedge A_\nu\ . \tag{15}$$

[5] Если ввести обозначение $d\mu_m^+ = d\mu_m \cdot \theta(k)$, то формулу (10) можно переписать и в терминах внешнего произведения форм:

$$\omega = \int d\mu_m^+ \cdot i\, a^*(k) \wedge a(k)\ .$$

Здесь уместно отметить, что хотя форма ω выражена через калибровочно-неинвариантную величину A_ν , сама она, разумеется, калибровочно-инвариантна.

Выберем теперь векторный потенциал A_μ так, чтобы он удовлетворял условию Лоренца $\partial_\nu A_\nu = 0$. При этом, согласно уравнению (14), он будет удовлетворять уравнению Даламбера: $\partial^2 A_\mu = 0$. Разобьём выражение (15) на два слагаемых:

$$\omega = -\int\limits_\Sigma d\sigma_\mu\, \partial_\mu A_\nu \wedge A_\nu + \int\limits_\Sigma d\sigma_\mu\, \partial_\nu A_\mu \wedge A_\nu \ .$$

Второй из этих двух интегралов равен нулю. В этом можно убедиться следующим образом. Во-первых, из условия Лоренца и антисимметрии внешнего умножения следует, что подынтегральное выражение является сохраняющимся током: $\partial_\mu(\partial_\nu A_\mu \wedge A_\nu) = 0$. Поэтому во втором интеграле, независимо от первого, можно перейти от интегрирования по поверхности Σ к интегрированию по поверхности $t = 0$. Получаем интеграл:

$$\int d^3\boldsymbol{x}\, \partial_\nu A_0 \wedge A_\nu \ .$$

Вследствие условия Лоренца его можно переписать так:

$$\int d^3\boldsymbol{x}\, \partial_\nu (A_0 \wedge A_\nu) \ .$$

Но $A_0 \wedge A_0 = 0$. Поэтому суммирование по индексу ν можно фактически проводить лишь от 1 до 3 . Получаем:

$$\int d^3\boldsymbol{x}\, \partial_n (A_0 \wedge A_n) \ .$$

Это интеграл от дивергенции трёхмерного вектора $A_0 \wedge A_n$. По теореме Остроградского-Гаусса, он равен потоку этого вектора через удалённую двумерную замкнутую поверхность. Этот поток равен нулю, поскольку векторный потенциал предполагается выбранным так, чтобы он там обращался в нуль.

Таким образом, при выполнении условия Лоренца $\partial_\nu A_\nu = 0$, симплектическая структура (15) может быть записана в виде:

$$\omega = -\int\limits_\Sigma d\sigma_\mu\, \partial_\mu A_\nu \wedge A_\nu \ . \tag{16}$$

Произведём теперь над функциями $A_\mu(x)$ и $F_{\mu\nu}(x)$ преобразование Фурье (1). Точно так же, как в случае скалярного поля, представим эти фурье-образы в виде:

$$\widetilde{A}_\mu(k) = 2\pi\, \delta(k^2) \cdot a_\mu(k) \ , \qquad \widetilde{F}_{\mu\nu}(k) = 2\pi\, \delta(k^2) \cdot f_{\mu\nu}(k) \ .$$

Здесь $a_\mu(k)$ и $f_{\mu\nu}(k)$ — обычные функции, заданные на световом конусе $k^2 = 0$.

Симплектическая структура (16) в фурье-представлении принимает вид[6]:

$$\omega^{\dot{-};\dot{-}} = -\int d\mu_m \cdot i\, \varepsilon(k) \cdot a_\nu(-k)^{\dot{-}}\, a_\nu(k)^{\dot{-}} \ . \tag{17}$$

Формулы (16) и (17) внешне очень похожи на соответствующие формулы (8) и (10) для скалярного поля. Точнее, они выглядят так же, как формулы для симплектической структуры четырёх скалярных полей. Следует, однако, иметь в виду, что инвариантное фазовое пространство Z^{phys} , введённое в этом пункте, не является прямой суммой инвариантных фазовых пространств четырёх скалярных полей. По этой причине, как уже отмечалось, скобку Пуассона для векторного потенциала вычислить нельзя.

Рассмотрим теперь, как устроено пространство Z^{phys} в фурье-представлении. Это пространство можно рассматривать как множество функций $a_\mu(k)$ на световом конусе $k^2 = 0$, удовлетворяющих условию Лоренца $-i\, k_\mu\, a_\mu(k) = 0$ и рассматриваемых с точностью до калибровочного преобразования:

$$a_\mu(k) \ \sim \ a_\mu(k) - i\, k_\mu\, \lambda(k) \ .$$

Отсюда, из формулы (17), очевидна невырожденность симплектической структуры на пространстве Z^{phys} .

Теперь ясно, что хотя и нельзя вычислить скобки Пуассона для компонент векторного потенциала, можно вычислить скобки $\{\, \widetilde{F}_{\mu\rho}(k)\, ,\, \widetilde{F}_{\nu\sigma}(k')\, \}$ и $\{\, F_{\mu\rho}(x)\, ,\, F_{\nu\sigma}(x')\, \}$. Эту задачу мы, однако, отложим до пункта 11.

[6] В терминах внешнего произведения её можно записать так:

$$\omega = -\int d\mu_m^+\, i\, a_\nu^*(k) \wedge a_\nu(k) \ .$$

6. Добавка Гейзенберга-Паули. При обсуждении квантовой теории электромагнитного поля со времён работы Гейзенберга и Паули [14] лагранжиан (13) принято видоизменять, добавляя к нему дополнительный член $\frac{\varepsilon}{2}(\partial_\mu A_\mu)^2$. Для такого шага в современных учебниках даётся множество различных „объяснений“. В основном они делятся на два класса.

К первому классу относятся „объяснения“, апеллирующие к формальным трудностям построения гамильтонова формализма и отслеживания релятивистской инвариантности. Как было показано в пункте 5, если тут и имелись какие-то трудности, то с построением инвариантного гамильтонова формализма они исчезают.

Ко второму классу относятся „объяснения“, так или иначе апеллирующие к квантовой теории. Наша ближайшая задача — объяснить, что причины модификации лагранжиана присутствуют уже в теории классической.

На первый взгляд, добавка $\frac{\varepsilon}{2}(\partial_\mu A_\mu)^2$ приводит только к фиксации калибровки: если условие Лоренца выполнялось в прошлом, то оно будет выполняться и в будущем. В действительности же имеется и более глубокое следствие: при построении теории рассеяния и теории возмущений появляется возможность избавиться от такой фикции, как разделение поля на „собственное“ поле частиц и на „излучение“.

Действительно, на практике оказывается невозможным решить динамическую задачу точно. Поэтому вначале вычисляется какое-либо „первое приближение“, а к нему уже далее вычисляются „радиационные поправки“. Чтобы учесть радиационную отдачу, приходится тем или иным способом делить поле на „собственное“ и „радиационное“. Сделать это вполне корректно, однако, невозможно даже в простейших случаях. Это не удивительно, поскольку в самом лагранжевом формализме никакого намёка на такое разделение не содержится.

Можно, однако, подходить к задачам рассеяния иначе. Рассмотрим для примера рассеяние двух частиц, взаимодействующих друг с другом посредством электромагнитного поля. Будем исходить из какой-нибудь наивной механической аналогии: скажем, двух тяжёлых шариков, скользящих по гладкой упругой мембране. Электромагнитному полю при этом соответствует деформированная мембрана.

Если не делить поле на собственное и радиационное, приходится считать, что всё поле частицами „создаётся“. Чтобы это как-то формализовать, нужно ввести процедуру включения и выключения взаимодействия.

Процесс рассеяния частиц и электромагнитного поля будет при этом описываться так:

1. В далёком прошлом частицы являются свободными и с полем не взаимодействуют. Присутствует также свободное поле, находящееся далеко от частиц.
2. Затем, пока частицы ещё далеко друг от друга, взаимодействие с электромагнитным полем адиабатически включается. Частицы при этом облачаются в собственное поле.
3. После того, как взаимодействие полностью включено, частицы (и поле) подлетают друг к другу близко, взаимодействуют и снова разлетаются.
4. Когда они достаточно далеко разлетятся, взаимодействие адиабатически выключается.
5. После этого остаются голые частицы, в окрестности которых никакого поля нет, и свободное поле, с частицами не связанное.

У шариков, скользящих по упругой мембране, включение и выключение взаимодействия осуществляется очевидным образом: нужно включить и выключить гравитационное поле. В случае же электромагнитного поля так просто поступить нельзя. Рассмотрим, например, взаимодействие электромагнитного поля $A_\mu(x)$ с заданным током $J_\mu(x)$. Лагранжиан в этом случае имеет вид:

$$L = -\tfrac{1}{4}\, F_{\mu\nu}\, F_{\mu\nu} - \alpha\, J_\mu\, A_\mu \ . \qquad (18)$$

Здесь $\alpha(x)$ — функция, включающая и выключающая взаимодействие. В дальнейшем, чтобы формулы записывались короче, мы будем использовать обозначение:

$$J^\alpha_\mu(x) = \alpha(x)\, J_\mu(x) \ .$$

Из лагранжиана (18) вытекает уравнение движения:

$$\partial_\mu F_{\mu\nu} = J^\alpha_\nu \ . \qquad (19)$$

Применяя теперь к обеим частям операцию ∂_ν , убеждаемся, что при $\partial_\nu J^\alpha_\nu \neq 0$ уравнение (19) решений не имеет. Таким образом, взаимодействие включить и выключить невозможно.

Если же к лагранжиану добавить член $\frac{\varepsilon}{2}\,(\partial_\mu A_\mu)^2$, то есть перейти к лагранжиану

$$L = -\,\tfrac{1}{4}\,F_{\mu\nu}\,F_{\mu\nu} + \tfrac{\varepsilon}{2}\,(\partial_\mu A_\mu)^2 - J^\alpha_\mu\,A_\mu \ ,$$

то уравнение движения принимает вид:

$$\partial_\mu F_{\mu\nu} - \varepsilon\,\partial_\nu\partial_\mu A_\mu = J^\alpha_\nu \ , \tag{20}$$

и решение $A_\mu(x)$ легко отыскивается для любой функции $\alpha(x)$.

Далее мы будем всюду полагать $\varepsilon = -1$. При этом уравнение (20) принимает особенно простой вид:

$$\partial^2 A_\nu = J^\alpha_\nu \ . \tag{21}$$

Его решение — это потенциал Лиенара-Вихерта. По этой причине указанную „калибровку“ следовало бы назвать калибровкой Лиенара-Вихерта. В квантовой электродинамике она, однако, называется калибровкой Фейнмана.

Если от обеих частей уравнения (21) взять четырёхмерную дивергенцию, получим уравнение:

$$\partial^2(\partial_\nu A_\nu) = \partial_\nu J^\alpha_\nu \ .$$

Отсюда нетрудно показать, что если взаимодействие включается адиабатически, и условие Лоренца $\partial_\nu A_\nu = 0$ выполнялось в далёком прошлом, то оно останется ненарушенным всюду.

Отсюда также следует, что дополнительный член $\frac{1}{2}\,(\partial_\mu A_\mu)^2$ в лагранжиане будет вносить нулевой вклад в вариацию действия. Поэтому в той области, где взаимодействие полностью включено, система из частиц и поля будет удовлетворять тем же уравнениям, что и система без добавки в лагранжиане.

Таким образом, введение в лагранжиан дополнительного члена не меняет в существенном картину рассеяния. Но при этом отпадает необходимость выделять каким-либо способом „собственное“ поле частиц, и появляется возможность для построения локальной теории возмущений.

Сейчас представляется затруднительным сказать, насколько далеко можно продвинуться в построении теории возмущений для классической электродинамики. Ясно только, что без введения дополнительного члена в лагранжиан ситуация была бы совершенно безнадёжной.

7. „Нефизическое“ электромагнитное поле. Рассмотрим теперь снова свободное электромагнитное поле, но в его лагранжиан уже сразу включим добавку $-\,\frac{1}{2}\,(\partial_\mu A_\mu)^2$. Лагранжиан тогда можно переписать в следующем виде:

$$L = -\,\tfrac{1}{4}\,F_{\mu\nu}\,F_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}\,(\partial_\mu A_\mu)^2 = -\,\tfrac{1}{2}\,\partial_\mu A_\nu\,\partial_\mu A_\nu + \tfrac{1}{2}\,\partial_\mu(A_\nu\,\partial_\nu A_\mu - A_\mu\,\partial_\nu A_\nu) \ .$$

Как будет показано в статье [II], член, являющийся полной дивергенцией, можно отбросить. После этого лагранжиан принимает замечательно простой вид:

$$L = -\,\tfrac{1}{2}\,\partial_\mu A_\nu\,\partial_\mu A_\nu \ ,$$

т. е. он по сути является лагранжианом четырёх скалярных полей[7] с $m = 0$, рассмотренных в пункте 4. Уравнение движения имеет вид:

$$\partial^2 A_\mu = 0 \ .$$

Инвариантное фазовое пространство теперь является прямой суммой четырёх фазовых пространств скалярных полей. Обозначим его как Z^4 . Симплектическая структура в координатном и фурье-представлениях даётся формулами:

$$\omega = -\int\limits_\Sigma d\sigma_\mu\,\partial_\mu A_\nu \wedge A_\nu \ . \tag{22}$$

$$\omega^{\dot{-};\dot{-}} = -\int d\mu_m \cdot i\,\varepsilon(k)\cdot a_\nu(-k)^{\dot{-}}\,a_\nu(k)^{\dot{-}} \ . \tag{23}$$

[7] Член, отвечающий полю с индексом $\nu = 0$, входит с отрицательным знаком.

Формулы (22) и (23) выглядят точно так же, как соответствующие формулы из пункта 5. Однако, разница в содержании этих формул существенна: теперь мы можем вычислить скобку Пуассона для векторного потенциала. В фурье-представлении она имеет вид:

$$\{ \widetilde{A}_\mu(k) \, , \, \widetilde{A}_\nu(k') \} = g_{\mu\nu} \cdot \Big[i \, \varepsilon(k) \cdot 2\pi \, \delta(k^2) \Big] \cdot (2\pi)^4 \delta(k+k') \; . \tag{24}$$

В координатном представлении:

$$\{ A_\mu(x) \, , \, A_\nu(x') \} = g_{\mu\nu} \, D_0(x-x') \; . \tag{25}$$

Здесь $D_0(y)$ — функция (12) при $m=0$. В этом случае её можно записать просто как:

$$D_0(y) = \frac{1}{2\pi} \, \varepsilon(y) \, \delta(y^2) \; .$$

Подействуем теперь на обе части формулы (24) символом ${}^{[\rho\mu]} \, 2 \, (-\, i \, k_\rho) \, {}^{[\sigma\nu]} \, 2 \, (-\, i \, k'_\sigma)$. Получаем формулу для скобки Пуассона тензора электромагнитного поля в фурье-представлении:

$$\{ \widetilde{F}_{\mu\rho}(k) \, , \, \widetilde{F}_{\nu\sigma}(k') \} = {}^{[\mu\rho]} \, {}^{[\nu\sigma]} \, 4 \, g_{\mu\nu} \, k_\rho \, k_\sigma \cdot \Big[i \, \varepsilon(k) \cdot 2\pi \, \delta(k^2) \Big] \cdot (2\pi)^4 \delta(k+k') \; . \tag{26}$$

В координатном представлении это соотношение переписывается так:

$$\{ F_{\mu\rho}(x) \, , \, F_{\nu\sigma}(x') \} = - \, {}^{[\mu\rho]} \, {}^{[\nu\sigma]} \, 4 \, g_{\mu\nu} \, \partial_\rho \, \partial_\sigma D_0(x-x') \; . \tag{27}$$

Здесь обе производные берутся по переменной без штриха.

Отметим сразу, что формулы (26) и (27) совпадают с формулами для скобок Пуассона „физического“ электромагнитного поля, описанного в пункте 5. Это будет доказано в пункте 11.

8. Энергия электростатического поля. В статье [III] получена формула, с помощью которой можно в рамках инвариантного гамильтонова формализма получать генераторы группы Пуанкаре. С её помощью легко получаем формулу для импульса „нефизического“ электромагнитного поля:

$$P_\nu = - \int d\mu_m^+ \cdot k_\nu \, a_\rho^*(k) \, a_\rho(k) \; . \tag{28}$$

Из этой формулы видно, что энергия „нефизического“ поля не является положительно-определённой. Более того, из этой формулы следует, что энергия, запасённая в электростатическом поле, созданном системой неподвижных зарядов, всегда *отрицательна.*

Здесь мы обсудим возникший парадокс чуть подробнее. Это нужно сделать потому, что он обычно неправильно трактовался в рамках *квантовой* теории (см., например, [16, 17, 18, 19]).

Проблема отрицательности энергии „временны́х“ фотонов в квантовой электродинамике была замечена давно. Считалось, что квантование в пространстве с индефинитным скалярным произведением позволяет переменить знак этой энергии. И это рассматривалось как один из аргументов для введения индефинитного скалярного произведения. Так казалось потому, что при индефинитном скалярном произведении в квантовом случае не вполне ясно, что следует называть энергией состояния: среднее значение гамильтониана или его собственное число. Эта неясность, конечно, происходила от того, что, во-первых, отсутствовала ясная концепция квантования, а во-вторых, классическая теория не была сформулирована должным образом.

Из проведённого рассмотрения, однако, видно, что обсуждаемая энергия *должна* быть отрицательной: только такая величина представляется естественной с точки зрения релятивистской теории. А индефинитность метрики в квантовом случае здесь вообще ни при чём.

Стоит также сразу сказать, что понятие вакуума поля мы вовсе не связываем с минимальностью энергии. У классического поля вакуум — это просто нулевой вектор пространства Z . Понятие же вакуума поля квантового мы введём при описании операции квантования в статье [VI].

Как же быть с положительностью электростатической энергии, хорошо известной в обычной электростатике? Дело в том, что в это понятие традиционно вкладывают иной смысл: под ним подразумевают работу, которую совершит система, когда заряды разобьют на бесконечно малые кусочки и медленно разнесут эти кусочки далеко друг от друга. Формула же (28) даёт энергию, которая останется у поля, если мгновенно выключить его взаимодействие с зарядами.

Более подробно этот вопрос мы здесь обсуждать не будем. Заметим лишь вот что. В электростатике имеется следующая формула для энергии:

$$E^{\,\mathrm{full}} = \tfrac{1}{2}\int \varphi\, dQ\ .$$

Множитель $\frac{1}{2}$ при этом обычно объясняют тем, что если использовать формулу для энергии во внешнем поле, то взаимная энергия любых двух элементов заряда учтётся дважды.

В рамках же той теории, которую мы здесь рассматриваем, поле всегда рассматривается как внешнее. Поэтому можно сказать, что энергия зарядов в электростатическом поле всегда даётся формулой:

$$E^{\,\mathrm{charges}} = \int \varphi\, dQ\ .$$

К ней нужно ещё добавить энергию поля:

$$E^{\,\mathrm{field}} = -\tfrac{1}{2}\int \varphi\, dQ\ .$$

В сумме $E^{\,\mathrm{charges}}$ и $E^{\,\mathrm{field}}$ как раз дают $E^{\,\mathrm{full}}$.

9. Состояния рассеяния „нефизического“ поля. Рассмотрим теперь рассеяние „нефизического“ поля на заданном токе. Как объяснено в пункте 6, будем считать, что взаимодействие с электромагнитным полем включается и выключается адиабатически, а частицы, составляющие ток, ускоряются только в той области пространства-времени, где взаимодействие полностью включено, т. е. $\alpha(y) = 1$.

В произвольной точке пространства-времени поле будет состоять из двух компонент: из поля, которое существовало в удалённом прошлом и из поля, которое создали частицы. Это последнее добавочное поле можно вычислить по формуле Лиенара-Вихерта:

$$A^{\mathrm{ret}}_{\mu}(x) = \int d^4x'\, D^{\mathrm{c}}_0(x-x')\, J^{\alpha}_{\mu}(x')\ , \qquad \text{где}\ \ D^{\mathrm{c}}_0(y) = \theta(y)\, D_0(y)\ . \tag{29}$$

В инвариантном гамильтоновом формализме под состоянием поля подразумевается решение соответствующего однородного уравнения. В данном случае это уравнение $\partial^2 A_\mu = 0$. Поэтому, когда мы говорим о состоянии поля в удалённом прошлом или в удалённом будущем, естественно при этом функцию $A_\mu(x)$ продолжить с помощью однородного уравнения на всё пространство. Таким образом мы приходим к определению in- и out-полей: $A_\mu(x)^{\underline{\mathrm{in}}}$ и $A_\mu(x)^{\underline{\mathrm{out}}}$. Здесь уже $\underline{\mathrm{in}}$ и $\underline{\mathrm{out}}$ — векторы инвариантного фазового пространства Z^4 . Эти векторы естественно назвать in- и out- состояниями. Разность этих двух векторов отвечает излучённому полю:

$$\underline{\mathrm{out}} - \underline{\mathrm{in}} = \underline{\mathrm{rad}}\ .$$

Чтобы найти поле $A_\mu(x)^{\underline{\mathrm{rad}}}$, нужно формулу Лиенара-Вихерта (29) слегка подправить:

$$A_\mu(x)^{\underline{\mathrm{rad}}} = \int d^4x'\, D_0(x-x')\, J^{\alpha}_{\mu}(x')\ .$$

В фурье-представлении эта формула записывается особенно просто:

$$\widetilde{A}_\mu(k)^{\underline{\mathrm{rad}}} = i\,\varepsilon(k)\cdot 2\pi\,\delta(k^2)\cdot \widetilde{J}^{\alpha}_{\mu}(k)\ ,$$

или, с использованием несингулярной функции $a_\mu(k)$ на световом конусе, ещё короче:

$$a_\mu(k)^{\underline{\mathrm{rad}}} = i\,\varepsilon(k)\,\widetilde{J}^{\alpha}_{\mu}(k)\ . \tag{30}$$

Видно, что в приведённых формулах можно перейти к адиабатическому пределу. При этом множество всех возможных векторов $\underline{\mathrm{rad}}$ образует линейное подпространство инвариантного фазового пространства Z^4 . Обозначим его как $Z^{\perp}$. Как было разъяснено в пункте 6, при адиабатическом включении и выключении взаимодействия условие Лоренца не нарушается. Поэтому пространство $Z^{\perp}$ не совпадает со всем Z^4 . С другой стороны, из формулы (30) следует, что кроме условия Лоренца никаким другим условием пространство $Z^{\perp}$ не ограничено. Таким образом, $Z^{\perp}$ — это подпространство пространства Z^4 , выделяемое условием Лоренца:

$$\underline{\mathrm{rad}} \in Z^{\perp} \quad\Longleftrightarrow\quad -i\,k_\mu\, a_\mu(k)^{\underline{\mathrm{rad}}} = 0\ . \tag{31}$$

Этим объясняется обозначение $Z^{\perp}$.

Естественно считать, что все возможные in-состояния когда-то были созданы из вакуума при взаимодействии с токами. Тогда векторы in- и out- полей также принадлежат подпространству $Z^{\perp}$. Поскольку все возможные поля излучения заполняют всё $Z^{\perp}$, то все возможные in- и out- поля его тоже заполняют.

Подставляя условие (31) в формулу (28) для вектора энергии-импульса, замечаем, что состояния из пространства $Z^{\perp}$ обладают неотрицательной энергией.

10. Остатки калибровочной инвариантности. Рассмотрим теперь такой вектор $\underline{\text{gauge}} \in Z$, что величину $a_\mu(k)^{\underline{\text{gauge}}}$ можно записать в виде:

$$a_\mu(k)^{\underline{\text{gauge}}} = -\,i\,k_\mu\,\lambda(k)\ ,$$

где $\lambda(k)$ — некоторая функция на световом конусе. Множество векторов такого вида образует линейное подпространство в Z^4 . Обозначим это подпространство $Z^{\parallel}$. Очевидно, $Z^{\parallel}$ содержится в $Z^{\perp}$.

Рассмотрим опять рассеяние частиц и поля, когда движение частиц заранее не задано, и присутствует, вообще говоря, ненулевое in-поле. Это рассеяние описывается лагранжианом:

$$L = L^{\text{particles}} - \tfrac{1}{2}\,\partial_\mu A_\nu\,\partial_\mu A_\nu - \alpha\,J_\mu\,A_\mu\ .$$

Будем считать, что соответствующие уравнения движения разрешимы, и траектории частиц и поле $A_\mu(x)$, для которых действие стационарно, найдены. И будем также считать, что адиабатическое включение (выключение) взаимодействия происходит в столь удалённом прошлом (будущем), что все частицы находятся далеко друг от друга, поле $A_\mu(k)^{\underline{\text{in}}}$ ($A_\mu(k)^{\underline{\text{out}}}$) находится в основном далеко от всех частиц и поле $A_\mu(k)^{\underline{\text{gauge}}}$ также находится далеко от всех частиц.

Добавим теперь к полю $A_\mu(x)$ поле $A_\mu(x)^{\underline{\text{gauge}}}$. Иными словами, совершим калибровочное преобразование:

$$A_\mu(x) \to A_\mu(x) + \partial_\mu\Lambda(x)\ , \tag{32}$$

где $\Lambda(x)$ — функция, фурье-образ которой связан с $\lambda(k)$ соотношением:

$$\widetilde{\Lambda}(k) = 2\pi\,\delta(k^2)\cdot\lambda(k)\ .$$

В области, где взаимодействие включается или выключается, эта добавка на стационарность действия повлиять не может. В самом деле, поскольку частицы находятся вне области, где эта добавка присутствует, вариации членов $L^{\text{particles}}$ и $-\,\alpha\,J_\mu\,A_\mu$ измениться не могут. Член же $-\tfrac{1}{2}\,\partial_\mu A_\nu\,\partial_\mu A_\nu$ отличается от калибровочно-инвариантного на полную дивергенцию, которая изменить вариацию не может, и на член $-\tfrac{1}{2}\,(\partial_\mu A_\mu)^2$, вариация которого равна нулю, т. к. $\partial_\mu A_\mu = 0$.

Рассмотрим теперь область, где взаимодействие полностью включено. При преобразовании (32) вариации членов $L^{\text{particles}}$ и $-\tfrac{1}{2}\,\partial_\mu A_\nu\,\partial_\mu A_\nu$ измениться не могут по тем же самым причинам, что и в случае областей, где взаимодействие включается или выключается. Остаётся член $-\,J_\mu\,A_\mu$. При калибровочном преобразовании (32) он переходит в $-\,J_\mu\,A_\mu - J_\mu\,\partial_\mu\Lambda(x)$. Следовательно, в вариации действия появляется дополнительный член $-\,\delta J_\mu\,\partial_\mu\Lambda(x)$. Интегрируя его по частям и учитывая сохранение тока, получаем, что он дополнительного вклада в вариацию не даёт.

Таким образом, при преобразовании (32) движения, удовлетворяющие условию стационарности действия, переходят в движения также удовлетворяющие этому условию. Можно сказать, что подпространство $Z^{\parallel}$ в процессе рассеяния фактически никак не участвует.

Естественно предположить, что состояния рассеяния электромагнитного поля наблюдаются только по их влиянию на заряженные частицы. Тогда любые два вектора из $Z^{\perp}$, отличающиеся на вектор из $Z^{\parallel}$, физически неразличимы. Следовательно, вместо пространства $Z^{\perp}$ можно рассматривать факторпространство $Z^{\perp/\parallel} = Z^{\perp}/Z^{\parallel}$.

Заметим теперь, что в фурье-представлении пространство $Z^{\perp/\parallel}$ можно рассматривать как множество функций $a_\mu(k)$ на световом конусе $k^2 = 0$, удовлетворяющих условию Лоренца $-\,i\,k_\mu\,a_\mu(k) = 0$ и рассматриваемых с точностью до калибровочного преобразования:

$$a_\mu(k)\ \sim\ a_\mu(k) - i\,k_\mu\,\lambda(k)\ .$$

Следовательно, можно установить естественное взаимно-однозначное соответствие между элементами пространств $Z^{\perp/\parallel}$ и Z^{phys} .

Более того, пространство $Z^{\perp/\parallel}$ естественным образом наследует из полного пространства Z^4 симплектическую структуру (23), и эта структура, очевидно, совпадает с симплектической структурой пространства Z^{phys} , даваемой формулой (17). Таким образом, $Z^{\perp/\parallel}$ и Z^{phys} естественно отождествляются и как *симплектические* пространства.

11. О скобке Пуассона на $Z^{\perp/\parallel}$. Рассмотрим теперь на пространстве Z^4 линейную функцию $\widetilde{F}_{\mu\rho}(k)\dot{-}$ (или $F_{\mu\rho}(x)\dot{-}$). При этом k (или, соответственно, x) считается фиксированным. Как было сказано в пункте 3, эта функция является генератором векторного поля на Z^4.

Заметим, во-первых, что поскольку рассматриваемая функция линейна на Z^4, её дифференциал не зависит от точки пространства Z^4 (и совпадает с самой этой функцией). Следовательно, полученное векторное поле постоянно на всём пространстве Z^4.

Во-вторых, дифференциал рассматриваемой функции, как и сама функция, обращается в нуль на $Z^{\parallel}$. Поэтому, как видно из формулы для симплектической структуры (23), вектор полученного постоянного поля лежит в подпространстве $Z^{\perp}$.

Из этих двух утверждений следует, что полученное поле естественным образом сужается на факторпространство $Z^{\perp/\parallel}$.

С другой стороны, пространство $Z^{\perp/\parallel}$ само наделено симплектической структурой. Если сузить функцию $\widetilde{F}_{\mu\rho}(k)\dot{-}$ (или $F_{\mu\rho}(x)\dot{-}$) на это факторпространство, то полученная функция сама будет генератором некоторого векторного поля в $Z^{\perp/\parallel}$.

Однако, поскольку симплектическая структура в $Z^{\perp/\parallel}$ наследуется из Z^4, легко видеть, что оба полученных векторных поля в $Z^{\perp/\parallel}$ совпадают.

Отсюда также следует, что формулы (26) и (27), полученные в пункте 7 для „нефизического“ поля, годятся и для „физического“.

Список литературы

[1] V. A. Fock “Konfigurationsraum und zweite Quantelung”, Z. Phys. **75**, 622-647 (1932). [„Конфигурационное пространство и вторичное квантование“, в сб. [2], стр. 25-51.]

[2] В. А. Фок *„Работы по квантовой теории поля“*, Л.: изд-во ЛГУ (1957).

[3] S. Weinberg *“The quantum theory of fields”*, v. 1: *“Foundations”*, Cambridge univ. press (1996).

[4] N. Bohr, L. Rosenfeld “Zur Frage der Messbarkeit der elektromagnetischen Feldgrössen”, Kgl. Danske Vidensk. Selskab., Math.-Fys. Medd. **12**(8), 3-65 (1933). [„К вопросу об измеримости электромагнитного поля“, в сб.: [5], т. 2, стр. 120-162.]

[5] Н. Бор *„Избранные научные труды“*, т. 2, М.: Наука (1971).

[6] В. И. Огиевецкий, Л. Мезинческу „Симметрия между бозонами и фермионами и суперполя“, УФН **117**(4), 637-683 (1975).

[7] E. Witten “Interacting field theory of open superstrings”, Nucl. Phys. **B276**, 291-324 (1986).

[8] Č. Crnković “Symplectic geometry and (super-) Poincaré algebra in geometrical theories”, Nucl. Phys. **B288**, 419-430 (1987).

[9] G. J. Zuckerman “Action principles and global geometry”, in *Mathematical aspects of string theory*, ed. S. T. Yau, Singapore: World scientific, 259-284 (1987).

[10] Č. Crnković, E. Witten “Covariant description of canonical formalism in geometrical theories”, in *Three hundred years of gravitation*, eds. S. W. Hawking, W. Israel, Cambridge: Cambridge univ. press, 676-684 (1987).

[11] Č. Crnković “Symplectic geometry of the covariant phase-space”, Class. Quant. Grav. **5**(12), 1557-1575 (1988).

[12] G. Barnich, M. Henneaux, C. Schomblond “Covariant description of the canonical formalism”, Phys. Rev. D **44**(4), R939-R941 (1991).

[13] В. И. Арнольд *„Математические методы классической механики“*, М.: Наука (1989).

[14] W. Heisenberg, W. Pauli “Zur Quantendynamik der Wellenfelder”, Z. Phys. **56**(1/2), 1-61 (1929). [„К квантовой динамике волновых полей“, см. в сб. [15], стр. 30-88.]

[15] В. Паули *„Труды по квантовой теории“*, т. 2, М.: Наука (1977).

[16] S. N. Gupta “Theory of longitudinal photons in quantum electrodynamics”, Proc. Phys. Soc. A **63**(7), 681-691 (1950).

[17] S. N. Gupta "Quantum mechanics with an indefinite metric", Can. J. Phys. **35**(8), 961-968 (1957).

[18] К. Надь *„Пространства состояний с индефинитной метрикой в квантовой теории поля"*, М.: Мир (1969). [K. L. Nagy *"State vector spaces with indefinite metric in quantum field theory"*, Budapest: Académiai Kiadó (1966).]

[19] R. Haag *"Lectures in theoretical physics"*, Sommer Institute for Th. Phys., Boulder, New York (1961). (цит. по [18])

On quantization of electromagnetic field.
II. Arbitrariness in choice of Lagrangian.

D. A. Arbatsky[*]

February 7, 2008

arXiv:math-ph/0402003v1 4 Feb 2004

Abstract

Here we show that addition to Lagrangian a divergence of a function does not change the symplectic structure on invariant phase space.

It is well-known that the same dynamics can be obtained by different choices of Lagrangian. The simplest replacement of this type is a linear substitution:

$$L \longrightarrow L' = \alpha L \ .$$

So far as in these papers we study the questions of quantization and normalize action by Planck's constant, $\hbar = 1$, this arbitrariness is absent in our research.

But there is another essential arbitrariness which is the addition to the Lagrangian a full divergence[1]:

$$L \longrightarrow L' = L + \partial_\mu F_\mu \ , \tag{1}$$

where F_μ is some vector function of the coordinate x and field values $\varphi_i(x)$.

In general case the Lagrangian may contain derivatives of the field with respect to coordinates of the order higher than first. Here we will take into account such a possibility and we will accept that the function F_μ may also depend on the derivatives of the field with respect to coordinates.

So far as the substitution (1) does not change dynamics, it leaves the invariant phase space Z unchanged. Now we will show that the symplectic structure on Z also remains unchanged. In fact, this means that the whole invariant Hamiltonian formalism does not feel such an addition. And so far as quantization is based on invariant Hamiltonian formalism, we get that the construction of the quantized field does not change under the substitution (1).

It seems to be difficult to prove the invariability of the symplectic structure using the formula for the symplectic current as a starting point. In this connection we will remind here how symplectic structure is defined directly in the variational terms [1, 2, 3, 4, 5, 6].

Consider the action in an arbitrary region Ω :

$$S = \int\limits_\Omega d^4x \, L(x, \varphi_i, \partial_\mu\varphi_i, \ldots, \partial_{\mu_1} \ldots \partial_{\mu_k}\varphi_i) \ . \tag{2}$$

Its variation, if the region is unchanged, is:

$$\delta S = \int\limits_\Omega d^4x \, \left(\frac{\delta L}{\delta\varphi_i} \, \delta\varphi_i + \partial_\mu j_\mu \right) \ , \tag{3}$$

Here

$$j_\mu = \frac{\delta L}{\delta(\partial_\mu\varphi_i)} \, \delta\varphi_i + \ldots + \frac{\delta L}{\delta(\partial_\mu\partial_{\mu_2} \ldots \partial_{\mu_k}\varphi_i)} \, \partial_{\mu_2} \ldots \partial_{\mu_k}\delta\varphi_i \ .$$

Variational derivative here is understood as

$$\frac{\delta}{\delta a} = \frac{\partial}{\partial a} - \partial_\mu \frac{\partial}{\partial(\partial_\mu a)} + \partial_\mu\partial_\nu \frac{\partial}{\partial(\partial_\mu\partial_\nu a)} - \ldots \ .$$

[*]http://d-a-arbatsky.narod.ru/

[1]In principle, there are other, more complicated substitutions which usually do not play a practical role because of their complexity.

The action (2) can be considered as a functional on the set of functions φ_i . Using the identity $\delta^2 = 0$ we get:

$$\int\limits_{\Omega} d^4x \left(\delta \left(\frac{\delta L}{\delta \varphi_i} \, \delta\varphi_i \right) + \partial_\mu \delta j_\mu \right) = 0 \ .$$

If we consider here variations only for functions φ_i for which action is stationary, then the first term in the last equation becomes zero. From here we get that the symplectic structure defined on Z as

$$\omega = \int\limits_{\Sigma} d\sigma_\mu \, \delta j_\mu(x)$$

does not depend on the choice of the space-like surface Σ (it is implied that Σ behaves well enough at the infinity).

Let us consider now how the above equations are changed under the substitution (1).

Variation of the new action S' can be written like in the formula (3):

$$\delta S' = \int\limits_{\Omega} d^4x \left(\frac{\delta L'}{\delta \varphi_i} \, \delta\varphi_i + \partial_\mu j'_\mu \right) = \int\limits_{\Omega} d^4x \left(\frac{\delta L}{\delta \varphi_i} \, \delta\varphi_i + \frac{\delta(\partial_\mu F_\mu)}{\delta \varphi_i} \, \delta\varphi_i + \partial_\mu j'_\mu \right) \ .$$

But $\delta(\partial_\mu F_\mu)/\delta\varphi_i = 0$. Therefore,

$$\delta S' = \int\limits_{\Omega} d^4x \left(\frac{\delta L}{\delta \varphi_i} \, \delta\varphi_i + \partial_\mu j'_\mu \right) \ . \tag{4}$$

On the other hand, this variation can be written in the terms of the old action:

$$\delta S' = \delta S + \int\limits_{\Omega} d^4x \, \partial_\mu \delta F_\mu \ . \tag{5}$$

Combining (4) and (5) with (3) we get:

$$\int\limits_{\Omega} d^4x \, (\partial_\mu j'_\mu - \partial_\mu j_\mu - \partial_\mu \delta F_\mu) = 0 \ .$$

So far as in this equation all three functions j'_μ , j_μ , and δF_μ are local (i. e. they become zero in regions where $\delta\varphi_i = 0$) we have:

$$\int\limits_{\Sigma} d\sigma_\mu \, (j'_\mu - j_\mu - \delta F_\mu) = 0 \ .$$

The value F_μ can be considered as a functional on the set of functions φ_i . Using the identity $\delta^2 = 0$ we get:

$$\int\limits_{\Sigma} d\sigma_\mu \, \delta j'_\mu(x) = \int\limits_{\Sigma} d\sigma_\mu \, \delta j_\mu(x) \ .$$

I. e. the substitution (1) leaves the symplectic structure on Z unchanged:

$$\omega' = \omega \ .$$

References

[1] E. Witten "Interacting field theory of open superstrings", Nucl. Phys. **B276**, 291-324 (1986).

[2] Č. Crnković "Symplectic geometry and (super-) Poincaré algebra in geometrical theories", Nucl. Phys. **B288**, 419-430 (1987).

[3] G. J. Zuckerman "Action principles and global geometry", in *Mathematical aspects of string theory*, ed. S. T. Yau, Singapore: World Scientific, 259-284 (1987).

[4] Č. Crnković, E. Witten "Covariant description of canonical formalism in geometrical theories", in *Three hundred years of gravitation*, eds. S. W. Hawking, W. Israel, Cambridge: Cambridge univ. press, 676-684 (1987).

[5] Č. Crnković "Symplectic geometry of the covariant phase-space", Class. Quant. Grav. **5**(12), 1557-1575 (1988).

[6] G. Barnich, M. Henneaux, C. Schomblond "Covariant description of the canonical formalism", Phys. Rev. D **44**(4), R939-R941 (1991).

О квантовании электромагнитного поля.
II. Неоднозначность выбора лагранжиана.

Д. А. Арбатский*

7 февраля 2008 г.

arXiv:math-ph/0402003v1 4 Feb 2004

Аннотация

Показано, что добавление к лагранжиану дивергенции некоторой функции не меняет симплектической структуры на инвариантном фазовом пространстве.

Как известно, к одной и той же динамике могут приводить различные выборы лагранжиана. Простейшей подстановкой такого рода является линейная замена:

$$L \longrightarrow L' = \alpha L \ .$$

Поскольку в данном цикле статей мы изучаем вопросы квантования и нормируем действие на постоянную Планка, $\hbar = 1$, то указанный произвол в нашем рассмотрении отсутствует.

Есть, однако, другой существенный произвол, заключающийся в добавлении к лагранжиану полной дивергенции[1]:

$$L \longrightarrow L' = L + \partial_\mu F_\mu \ , \tag{1}$$

где F_μ — некоторая векторная функция от координаты x и полевых переменных $\varphi_i(x)$.

В общем случае лагранжиан может содержать производные от поля по координатам выше первого порядка. Мы будем здесь иметь в виду такую возможность и будем считать, что функция F_μ также может зависеть от производных поля по координатам.

Поскольку подстановка (1) не меняет динамики, она оставляет инвариантное фазовое пространство Z неизменным. Сейчас мы покажем, что при этом также остаётся неизменной и симплектическая структура на Z . Это фактически приводит к тому, что весь инвариантный гамильтонов формализм к такой добавке нечувствителен. А поскольку квантование осуществляется на основе инвариантного гамильтонова формализма, то отсюда последует, что и конструкция квантованного поля при подстановке (1) не меняется.

Доказать неизменность симплектической структуры, исходя из формулы для симплектического тока, представляется затруднительным. В связи с этим мы напомним здесь, как определяется симплектическая структура непосредственно в вариационных терминах [1, 2, 3, 4, 5, 6].

Рассмотрим действие в произвольной области Ω :

$$S = \int\limits_\Omega d^4x \, L(x, \varphi_i, \partial_\mu \varphi_i, \ldots, \partial_{\mu_1} \ldots \partial_{\mu_k} \varphi_i) \ . \tag{2}$$

Его вариация, если область не меняется, равна:

$$\delta S = \int\limits_\Omega d^4x \, \left(\frac{\delta L}{\delta \varphi_i} \, \delta\varphi_i + \partial_\mu j_\mu \right) \ , \tag{3}$$

Здесь

$$j_\mu = \frac{\delta L}{\delta(\partial_\mu \varphi_i)} \, \delta\varphi_i + \ldots + \frac{\delta L}{\delta(\partial_\mu \partial_{\mu_2} \ldots \partial_{\mu_k} \varphi_i)} \, \partial_{\mu_2} \ldots \partial_{\mu_k} \delta\varphi_i \ .$$

*http://d-a-arbatsky.narod.ru/

[1] В принципе, существуют и другие, более сложные подстановки, которые ввиду своей сложности практической роли обычно не играют.

Вариационная производная при этом понимается как

$$\frac{\delta}{\delta a}=\frac{\partial}{\partial a}-\partial_\mu\frac{\partial}{\partial(\partial_\mu a)}+\partial_\mu\partial_\nu\frac{\partial}{\partial(\partial_\mu\partial_\nu a)}-\dots\ .$$

Действие (2) может рассматриваться как функционал на множестве функций φ_i . Используя тождество $\delta^2=0$, получаем:

$$\int\limits_\Omega d^4x\,\left(\delta\left(\frac{\delta L}{\delta\varphi_i}\,\delta\varphi_i\right)+\partial_\mu\delta j_\mu\right)=0\ .$$

Если здесь рассматривать варьирование только функций φ_i , для которых действие стационарно, то первый член в последнем уравнении зануляется. Отсюда получаем, что симплектическая структура, задаваемая на Z как

$$\omega=\int\limits_\Sigma d\sigma_\mu\,\delta j_\mu(x)\ ,$$

не зависит от выбора пространственно-подобной поверхности Σ (предполагается, что Σ ведёт себя достаточно хорошо на бесконечности).

Посмотрим теперь, как изменятся приведённые уравнения при подстановке (1).

Вариация нового действия S' может быть записана аналогично формуле (3):

$$\delta S'=\int\limits_\Omega d^4x\,\left(\frac{\delta L'}{\delta\varphi_i}\,\delta\varphi_i+\partial_\mu j'_\mu\right)=\int\limits_\Omega d^4x\,\left(\frac{\delta L}{\delta\varphi_i}\,\delta\varphi_i+\frac{\delta(\partial_\mu F_\mu)}{\delta\varphi_i}\,\delta\varphi_i+\partial_\mu j'_\mu\right)\ .$$

Но $\delta(\partial_\mu F_\mu)/\delta\varphi_i=0$. Следовательно,

$$\delta S'=\int\limits_\Omega d^4x\,\left(\frac{\delta L}{\delta\varphi_i}\,\delta\varphi_i+\partial_\mu j'_\mu\right)\ . \tag{4}$$

С другой стороны, эта же вариация может быть записана в терминах старого действия:

$$\delta S'=\delta S+\int\limits_\Omega d^4x\,\partial_\mu\delta F_\mu\ . \tag{5}$$

Комбинируя (4) и (5) с (3), получаем:

$$\int\limits_\Omega d^4x\,(\partial_\mu j'_\mu-\partial_\mu j_\mu-\partial_\mu\delta F_\mu)=0\ .$$

Поскольку в этом уравнении все три функции j'_μ , j_μ и δF_μ локальные (т. е. они обращаются в ноль в тех областях, где $\delta\varphi_i=0$), отсюда следует:

$$\int\limits_\Sigma d\sigma_\mu\,(j'_\mu-j_\mu-\delta F_\mu)=0\ .$$

Величину F_μ можно рассматривать как функционал на множестве функций φ_i . Используя тождество $\delta^2=0$, получаем:

$$\int\limits_\Sigma d\sigma_\mu\,\delta j'_\mu(x)=\int\limits_\Sigma d\sigma_\mu\,\delta j_\mu(x)\ .$$

Т. е. преобразование (1) оставляет симплектическую структуру на Z неизменной:

$$\omega'=\omega\ .$$

Список литературы

[1] E. Witten “Interacting field theory of open superstrings”, Nucl. Phys. **B276**, 291-324 (1986).

[2] Č. Crnković “Symplectic geometry and (super-) Poincaré algebra in geometrical theories”, Nucl. Phys. **B288**, 419-430 (1987).

[3] G. J. Zuckerman “Action principles and global geometry”, in *Mathematical aspects of string theory*, ed. S. T. Yau, Singapore: World Scientific, 259-284 (1987).

[4] Č. Crnković, E. Witten “Covariant description of canonical formalism in geometrical theories”, in *Three hundred years of gravitation*, eds. S. W. Hawking, W. Israel, Cambridge: Cambridge univ. press, 676-684 (1987).

[5] Č. Crnković “Symplectic geometry of the covariant phase-space”, Class. Quant. Grav. **5**(12), 1557-1575 (1988).

[6] G. Barnich, M. Henneaux, C. Schomblond “Covariant description of the canonical formalism”, Phys. Rev. D **44**(4), R939-R941 (1991).

arXiv:math-ph/0402003v1 4 Feb 2004

On quantization of electromagnetic field. III. Formula for generators of infinitesimal linear canonical transformations.

D. A. Arbatsky*

February 7, 2008

Abstract

Here we suggest a formula for generators of infinitesimal linear symplectic transformations of invariant phase space. We discuss applications of this formula to classical and quantum field theory. We show the existence of generators of the symmetry group for quantum case.

1. Formula. In the paper [I] we used a formula that gives generators of infinitesimal linear transformations for invariant Hamiltonian formalism. In view of importance and generality of this formula we will give here its derivation and discussion.

So, consider some linear field which is described by the invariant Hamiltonian formalism. Let us for definiteness look for the generators of the Poincare group.

So far as the symplectic structure ω of the invariant phase space is supposed to be Poincare-invariant, the Poincare group acts on Z as continuous linear symplectic group. For any infinitesimal transformation from this group[1] we have a Hamiltonian flow on Z . The Hamiltonian of this flow is a function on Z . Let us denote it $G^{\underline{\cdot}}$. Now we will find the explicit formula for this function.

First, it is immediately seen that this function is defined up to addition of a constant. We will fix this constant by the condition $G^{\underline{0}} = 0$, i. e. the function is equal to zero for the zero vector from space Z . Speaking in a more physical way, we will suppose that the vacuum of a classical field has zero energy, momentum etc.

Let us fix now in the space Z a point $\underline{c}$. The vector of velocity of the flow in this point we denote as $\underline{\delta c}$. Let us draw the straight line segment from the point $\underline{0}$ to the point $\underline{c}$, i. e. let us consider the set of points like $\alpha\,\underline{c}$, $\alpha \in [0;1]$. So far as transformations of the group under consideration are linear, in the point $\alpha\,\underline{c}$ the velocity of flow is equal to $\alpha\,\underline{\delta c}$. On the other hand, the vector of the velocity of flow is connected with the Hamiltonian by the relation:

$$dG\big|_{\alpha\underline{c}}{}^{\underline{b}} = \omega^{\,\underline{b}\,;\,\alpha\underline{\delta c}}\ , \tag{1}$$

which is true for any $\underline{b} \in Z$. Here the left side denotes the differential of the function $G^{\underline{\cdot}}$ calculated in the point $\alpha\,\underline{c}$ and taken on the vector $\underline{b}$.

As a vector $\underline{b}$ in the equation (1) we can take the vector $d\alpha\,\underline{c}$:

$$dG\big|_{\alpha\underline{c}}{}^{d\alpha\underline{c}} = \omega^{\,d\alpha\underline{c}\,;\,\alpha\underline{\delta c}}\ .$$

Using bilinearity of the form ω we can write it as:

$$dG\big|_{\alpha\underline{c}}{}^{d\alpha\underline{c}} = \omega^{\,\underline{c}\,;\,\underline{\delta c}}\ \alpha\,d\alpha\ .$$

Integrating this relation with respect to α in the limits from 0 to 1 we get the formula for the generator:

$$\boxed{G^{\underline{c}} = \tfrac{1}{2}\,\omega^{\,\underline{c}\,;\,\underline{\delta c}}} \tag{2}$$

*http://d-a-arbatsky.narod.ru/

[1] I. e. an element of its Lie algebra.

2. Application to classical field theory. It should not be thought that the formula (2) is just other form of writing the Noether formula. First, it works only in the linear case. Second, it is not supposed to be used for looking for *integrals of motion*, because they are supposed to be known for linear fields (the equations of the motion are solved). Nevertheless, the formula (2) turns out to be very convenient in practical application for many reasons.

First, it is applied much easier. Second, in contrast to the Noether formula, it is not connected with coordinate representation. If we know a formula for the symplectic structure ω, for example, in the Fourier-representation and we know how in this representations the group under consideration acts (for example, Poincare group) then we get the generators as easily as in the coordinate representation.

Furthermore, as it was shown in the paper [II], the structure of the invariant Hamiltonian formalism does not change, if we add to the Lagrangian a full divergence. So far as the formula (2) is written in the terms of this formalism only, the independence of generators from this substitution becomes apparent.

As a simplest example, consider the scalar field. In the paper [I] we have shown that in the Fourier representation the symplectic structure of this field is given by the formula:

$$\omega^{\underline{\cdot}\,;\,\underline{\cdot}} = \int d\mu_m \cdot i\,\varepsilon(k) \cdot a(-k)^{\underline{\cdot}}\, a(k)^{\underline{\cdot}} \ . \tag{3}$$

Now consider a space-time shift of the field by infinitesimal vector $\delta\varepsilon_\nu$. A state $\underline{c}$ changes to $\underline{c} + \underline{\delta c}$. And:

$$a(k)^{\underline{\delta c}} = i\,\delta\varepsilon_\nu\, k_\nu\, a(k)^{\underline{c}} \ .$$

Substituting this expression to the formula (2), and taking into account the formula (3), we get:

$$G^{\underline{c}} = -\tfrac{1}{2}\,\delta\varepsilon_\nu \int d\mu_m \cdot \varepsilon(k) \cdot k_\nu\, a(-k)^{\underline{c}}\, a(k)^{\underline{c}} = \,-\,\delta\varepsilon_\nu \int d\mu_m^+ \cdot k_\nu\, a^*(k)^{\underline{c}}\, a(k)^{\underline{c}} \ .$$

Let us denote the coefficient of $\delta\varepsilon_\nu$ as $-P_\nu$. Omitting the argument $\underline{c}$ we get the formula for the vector of energy and momentum:

$$P_\nu = \tfrac{1}{2} \int d\mu_m \cdot \varepsilon(k) \cdot k_\nu\, a(-k)\, a(k) = \int d\mu_m^+ \cdot k_\nu\, a^*(k)\, a(k) \ . \tag{4}$$

3. About generators in quantum field theory. In the paper [VI] we will describe how construction of quantum fields is performed. Let us discuss here how generators are found in the quantum case.

As far as I know, there was not suggested any analog of Noether theorem for the quantum field theory[2].

Note now, that in the case of invariant quantization of fields, in accordance with the scheme given in the paper [VI], the action of group of invariance is naturally transferred to the quantum space of states $\mathcal{H}$. And this action is unitary (in the case of indefinite scalar product — pseudounitary).

If the scalar product in $\mathcal{H}$ is positive-definite, then in accordance with the Stone theorem, we have the self-adjoint quantum generator. If the scalar product in $\mathcal{H}$ is indefinite, then everything is similar, but we need to introduce some special mathematical terminology.

So, generators of the group of invariance can be rigorously introduced in the quantum case also.

It seems to be of interest to get some useful formulas for quantum generators also.

So far as the vacuum $|\,0\,\rangle$ of the quantum field remains invariant under the action of the symmetry group, then, speaking formally, we just need to write expressions like (4) making normal ordering of operators in the integrand. In the case of Poincare-invariant quantization of the scalar field that leads to the positive-definite scalar product we get:

$$\hat{P}_\nu = \int d\mu_m^+ \cdot k_\nu\, \hat{a}^*(k)\, \hat{a}(k) \ . \tag{5}$$

But, nevertheless, the strict mathematical meaning of the obtained expression is not fully clear[3]. It seems to be topical to develop a theory of integrals like (5) and prove that if the integrands are normally ordered, we get exactly the generators introduced here.

[2] Some authors allege opposite. I allow myself just to ignore their opinion on this question.

[3] It will be seen from discussion of quantization and topological questions in the paper [VI] that symbols like $\hat{a}^*(k)$ have sense only after a proper averaging. But in the given formula we need to integrate *the product* of such symbols.

arXiv:math-ph/0402003v1 4 Feb 2004

О квантовании электромагнитного поля. III. Формула для генераторов инфинитезимальных линейных канонических преобразований.

Д. А. Арбатский*

7 февраля 2008 г.

Аннотация

Предложена формула для генераторов бесконечно малых линейных симплектических преобразований инвариантного фазового пространства. Обсуждаются применения этой формулы к классической и к квантовой теории поля. Показано существование генераторов группы симметрии для квантового случая.

1. Формула. В статье [I] использовалась формула, дающая генераторы бесконечно малых линейных преобразований для инвариантного гамильтонова формализма. Ввиду важности и общности этой формулы, здесь будут даны её вывод и обсуждение.

Итак, рассмотрим какое-нибудь линейное поле, описываемое инвариантным гамильтоновым формализмом. Будем, для определённости, искать для него генераторы группы Пуанкаре.

Поскольку симплектическая структура ω инвариантного фазового пространства Z предполагается пуанкаре-инвариантной, группа Пуанкаре действует на Z как непрерывная линейная симплектическая группа. Каждому бесконечно малому преобразованию этой группы[1] соответствует гамильтонов поток на Z. Гамильтониан этого потока является функцией на Z. Обозначим её $G^{\underline{\cdot}}$. Найдём явный вид этой функции.

Во-первых, сразу ясно, что эта функция определена с точностью до аддитивной константы. Эту константу мы зафиксируем условием $G^{\underline{0}} = 0$, т. е. функция равна нулю на нулевом векторе пространства Z. Выражаясь более физическим языком, мы будем полагать, что вакуум классического поля обладает нулевыми энергией, импульсом и т. п.

Зафиксируем теперь в пространстве Z точку $\underline{c}$. Вектор скорости потока в этой точке обозначим $\underline{\delta c}$. Проведём из точки $\underline{0}$ в точку $\underline{c}$ отрезок, т. е. рассмотрим множество точек вида $\alpha\,\underline{c}$, $\alpha \in [0;1]$. Поскольку преобразования рассматриваемой группы линейны, в точке $\alpha\,\underline{c}$ скорость потока равна $\alpha\,\underline{\delta c}$. С другой стороны, вектор скорости потока связан с гамильтонианом соотношением:

$$dG\big|_{\alpha\underline{c}}{}^{\underline{b}} = \omega^{\,\underline{b}\,;\,\alpha\underline{\delta c}}\ , \tag{1}$$

выполняющимся для любого $\underline{b} \in Z$. Здесь левая часть обозначает дифференциал функции $G^{\underline{\cdot}}$, вычисленный в точке $\alpha\,\underline{c}$ и взятый на векторе $\underline{b}$.

В качестве вектора $\underline{b}$ в уравнении (1) можно взять вектор $d\alpha\,\underline{c}$:

$$dG\big|_{\alpha\underline{c}}{}^{d\alpha\underline{c}} = \omega^{\,d\alpha\underline{c}\,;\,\alpha\underline{\delta c}}\ .$$

Используя билинейность формы ω, перепишем это так:

$$dG\big|_{\alpha\underline{c}}{}^{d\alpha\underline{c}} = \omega^{\,\underline{c}\,;\,\underline{\delta c}}\ \alpha\, d\alpha\ .$$

Интегрируя это соотношение по α в пределах от 0 до 1, получаем формулу для генератора:

$$\boxed{G^{\underline{c}} = \tfrac{1}{2}\,\omega^{\,\underline{c}\,;\,\underline{\delta c}}} \tag{2}$$

*http://d-a-arbatsky.narod.ru/

[1] То есть элементу её алгебры Ли.

2. Применение к классической теории поля. Не следует думать, что формула (2) является просто другой записью формулы Нётер. Во-первых, она работает только в линейном случае. Во-вторых, она вовсе не предназначается для поиска *интегралов движения*, ибо у линейных полей они и так известны (уравнения движения решены). Несмотря на это, формула (2) оказывается очень удобной при практическом применении по многим причинам.

Во-первых, её применять значительно проще. Во-вторых, в отличие от формулы Нётер, она вовсе не привязана к координатному представлению. Если вид симплектической структуры ω известен, например, в фурье-представлении, и известно, как в этом представлении действует рассматриваемая группа (например, группа Пуанкаре), то генераторы получаются столь же просто, как и в координатном представлении.

Кроме того, в статье [II] мы видели, что структура инвариантного гамильтонова формализма не меняется, если к лагранжиану добавить полную дивергенцию. Поскольку формула (2) записана исключительно в терминах этого формализма, независимость генераторов от указанной подстановки оказывается очевидной.

В качестве простейшего примера рассмотрим скалярное поле. В статье [I] мы видели, что в Фурье-представлении симплектическая структура этого поля даётся формулой:

$$\omega^{\underline{\cdot};\underline{\cdot}} = \int d\mu_m \cdot i\,\varepsilon(k) \cdot a(-k)^{\underline{\cdot}}\, a(k)^{\underline{\cdot}} \ . \tag{3}$$

Рассмотрим далее пространственно-временной сдвиг поля на бесконечно малый вектор $\delta\varepsilon_\nu$. Состояние $\underline{c}$ заменяется при этом на $\underline{c} + \underline{\delta c}$. При этом:

$$a(k)^{\underline{\delta c}} = i\,\delta\varepsilon_\nu\, k_\nu\, a(k)^{\underline{c}} \ .$$

Подставляя это выражение в формулу (2), с учётом формулы (3), получаем:

$$G^{\underline{c}} = -\tfrac{1}{2}\,\delta\varepsilon_\nu \int d\mu_m \cdot \varepsilon(k) \cdot k_\nu\, a(-k)^{\underline{c}}\, a(k)^{\underline{c}} = \, -\,\delta\varepsilon_\nu \int d\mu_m^+ \cdot k_\nu\, a^*(k)^{\underline{c}}\, a(k)^{\underline{c}} \ .$$

Коэффициент при $\delta\varepsilon_\nu$ обозначим теперь как $-P_\nu$. Опуская аргумент $\underline{c}$, имеем формулу для вектора энергии-импульса:

$$P_\nu = \tfrac{1}{2} \int d\mu_m \cdot \varepsilon(k) \cdot k_\nu\, a(-k)\, a(k) = \int d\mu_m^+ \cdot k_\nu\, a^*(k)\, a(k) \ . \tag{4}$$

3. О генераторах в квантовой теории поля. В статье [VI] мы опишем, каким образом осуществляется построение квантовых полей. Обсудим здесь, каким образом обстоят дела с поиском генераторов в квантовом случае.

Аналога теоремы Нётер в квантовой теории поля, насколько мне известно, до сих пор не предложено[2].

Заметим, однако, что в случае инвариантного квантования полей в соответствии со схемой, изложенной в статье [VI], действие группы инвариантности естественно переносится на квантовое пространство состояний $\mathcal{H}$. Причём это действие унитарно (в случае индефинитного скалярного произведения — псевдоунитарно).

Если скалярное произведение в $\mathcal{H}$ является положительно-определённым, то в соответствии с теоремой Стоуна имеем самосопряжённый квантовый генератор. Если же скалярное произведение в $\mathcal{H}$ индефинитно, то дело обстоит столь же просто, но нужно вводить специальную математическую терминологию.

Таким образом, генераторы группы инвариантности могут быть строго введены и в квантовом случае.

Представляет интерес получить для квантовых генераторов также какие-нибудь удобные формулы.

Поскольку вакуум $|\,0\,\rangle$ квантованного поля остаётся при вышеуказанном действии группы симметрии инвариантным, то чисто формально, классические выражения типа (4) нужно просто записать, произведя нормальное упорядочение соответствующих операторов под знаком интеграла. В случае, если речь идёт о пуанкаре-инвариантном квантовании скалярного поля, приводящем к положительно-определённому скалярному произведению, получаем:

$$\hat{P}_\nu = \int d\mu_m^+ \cdot k_\nu\, \hat{a}^*(k)\, \hat{a}(k) \ . \tag{5}$$

[2] Многие очень авторитетные авторы утверждают обратное. Я позволю себе их мнение по данному вопросу проигнорировать.

При этом, однако, точный математический смысл приведённого выражения не вполне ясен[3]. Представляется актуальным построить теорию интегралов вида (5) и показать, что если подынтегральные выражения нормально упорядочены, то получаются в точности введённые нами генераторы.

[3]Как будет ясно из обсуждения квантования и топологических вопросов в статье [VI] символы вида $\hat{a}^*(k)$ имеют ясный смысл после подходящего усреднения. В приведённой же формуле производится интегрирование *произведения* таких символов.

On quantization of electromagnetic field.
IV. Theory of field representations.

D. A. Arbatsky*

February 7, 2008

arXiv:math-ph/0402003v1 4 Feb 2004

Abstract

We introduce a notion of induced symplectic representation of the Poincare group. Classical relativistic fields are considered as such representations. We describe the method of investigation of these fields in the sense of their reducibility. We introduce the notion of the field oscillator as an inducing Hamiltonian system.

1. Symplectic representations. By Poincare group we will call a connected continuous ten-parameter group of transformations of space-time including both homogeneous transformations (the Lorentz group) and space-time shifts. We will denote the Poincare group by the symbol $\mathcal{P}$.

So far as in these papers we study fields that are relativistic invariant, every solution of equations of the motion is transformed to a solution by a transformation from the Poincare group. So, this defines the action of the Poincare group on the invariant phase space Z .

In a more concrete way this action can be described in the following way. Let we have a transformation $g \in \mathcal{P}$. It acts on points of space-time in the following way:

$$x \;\to\; x' = gx \;.$$

In the space, where the values of the field function φ_i lie, the transformation g acts as:

$$\varphi_i \;\to\; \varphi'_i = \Lambda_{ij}\,\varphi_j \;.$$

The action of g in the space Z can be described by the formulas:

$$\underline{c} \longrightarrow \underline{gc} \;, \qquad \varphi_i(x)\,\underline{gc} = \Lambda_{ij}\,\varphi_j(g^{-1}x)\,\underline{c} \;. \tag{1}$$

As we have said in the paper [I], we will consider here only linear fields. The action of the Poincare group $\mathcal{P}$ obviously preserve the linear structure in the space Z . So, in the space Z we have a linear representation of the Poincare group.

Furthermore, the Poincare group preserves in the space Z the symplectic structure. So, we come to linear *symplectic* representations of the Poincare group $\mathcal{P}$. The connection of symplectic representations with unitary will become clear after we define the operation of quantization in the paper [VI]. It will be shown there that in the field theory symplectic representations apparently play a role that is not less important than that of unitary. Anyway, they are connected with the construction of quantized field more closely.

2. "Reduction" of field representation. Consider now the question of reducibility of field representations of the Poincare group $\mathcal{P}$. We will always imply here reducibility in the complex sense. In order to not complexify the space Z let us consider the conjugate space $Z^*_{\mathbb{C}}$. In $Z^*_{\mathbb{C}}$, obviously, acts the conjugate representation of the group $\mathcal{P}$. In order to define this action we just need to read the formula (1) a little differently:

$$\varphi_i(x)\,\underline{\cdot} \longrightarrow \big(g\,\varphi_i(x)\big)\,\underline{\cdot} \;, \qquad \big(g\,\varphi_i(x)\big)\,\underline{c} = \Lambda_{ij}\,\varphi_j(g^{-1}x)\,\underline{c} \;, \tag{2}$$

i. e. we connect the symbol g not with an element of Z , but with an element of $Z^*_{\mathbb{C}}$. Below by a field representation we will always imply the action of the Poincare group by formula (2) in the complexified conjugate space $Z^*_{\mathbb{C}}$.

*http://d-a-arbatsky.narod.ru/

For infinite-dimensional representations the notion of reduction requires specification. Now we will explain the structure of field representations under consideration and simultaneously specify in what sense we will talk about their reducibility.

In the case of unitary representations the main tool of investigation is Mackey theorem (see, for example, [1]). This theorem brings investigation of a representation of the Poincare group $\mathcal{P}$ to investigation of the corresponding little Lorentz group $\mathcal{L}_k$. The construction of Mackey induction can be generalized to any linear representations. But a general linear representation (including symplectic) of the group $\mathcal{P}$ can be not induced from the little group. Nevertheless, representations induced in Mackey sense constitute a very wide class, and in fact, we will restrict ourself with them.

Let us make a Fourier transformation of the field and write the result in the form:

$$\widetilde{\varphi}_i(k) = 2\pi\,\delta(k^2 - m^2)\cdot a_i(k)\ . \tag{3}$$

It is natural to call the scalar m a mass of the field, like in quantum theory.

On the grounds of the formula (3) it is natural to say that the field representation decomposes into the direct sum of positive- and negative-frequency subrepresentations:

$$Z^*_{\mathbb{C}} = Z^{*\,(+)}_{\mathbb{C}} \oplus Z^{*\,(-)}_{\mathbb{C}}\ .$$

These two representations we will also call field representations. The projectors to the positive- and negative-frequency subspaces in the Fourier representation are just operators of multiplication by the functions $\theta(+k)$ and $\theta(-k)$, correspondingly.

So far as we consider here real fields, $a_i(-k) = a^*_i(k)$. So, it is natural to suppose that both subspaces $Z^{*\,(+)}_{\mathbb{C}}$ and $Z^{*\,(-)}_{\mathbb{C}}$ are reducible in the same degree. In this connection we can restrict ourself with consideration of the positive-frequency subspace.

Consider now a fixed vector $k^{(0)}$ on the mass surface: $(k^{(0)})^2 = m^2$. And consider the subgroup of the Lorentz group that leaves this vector unchanged, i. e. the so called little group of this vector. Let us denote this group $\mathcal{L}_{k^{(0)}}$. Obviously, the set of values $a_i(k^{(0)})$ corresponding to different values of the index i is transformed linearly under action of transformations from $\mathcal{L}_{k^{(0)}}$. This complex representation of the little group we will suppose to be finite-dimensional. Like in the unitary case, we will say that the field representation under consideration is induced by this representation of the little group.

Let us, in analogy with the unitary case, suppose that the further reducibility of the field representation (i. e. reduction of its positive-frequency part) is fully defined by reducibility of the inducing representation.

Let us note here also that in the case of massive fields, i. e. when $m > 0$, the little group $\mathcal{L}_{k^{(0)}}$ is the group of three-dimensional rotations $SO(3)$. This group is compact, and therefore, its representation can be made unitary by introducing a proper scalar product. Therefore, the inducing representation turns out to be fully reducible, and the equivalence classes of irreducible components, like in the unitary case, are defined by a one integer or half-integer number. It is natural to call this number, like in the quantum case, a *spin* of the irreducible component under consideration.

In the case of zero-mass field the little group, as we know, is the group of motions of a Euclidian plane $E(2)$. This group is not compact, and situation becomes much more complicated than in the unitary case. We will see it soon with example of electromagnetic field.

3. Field oscillator as inducing Hamiltonian system. It is easy to notice that there is a great similarity in description of the harmonic oscillator and the scalar field. Now we will research this phenomenon in detail.

Consider any real field that is written in the Fourier representation as (3). Let us suppose that the Poisson brackets of the field values in the Fourier representation have the form:

$$\{\,\widetilde{\varphi}_i(k)\,,\,\widetilde{\varphi}_j(k')\,\} = B_{ij}(k)\cdot\Big[\,i\,\varepsilon(k)\cdot 2\pi\,\delta(k^2 - m^2)\Big]\cdot(2\pi)^4\delta(k + k')\ . \tag{4}$$

Here $B_{ij}(k)$ is some tensor function. In the cases of the scalar field and the non-physical electromagnetic field, in accordance with the formulas of the paper [I], this function is just a constant. But in general case it is not so. So, let us consider its properties with more details.

First, so far as $B_{ij}(k)$ is multiplied by $2\pi\,\delta(k^2 - m^2)$, we can admit that it is defined only on the mass surface $k^2 = m^2$. Second, using antisymmetry of the Poisson bracket, we get:

$$B_{ij}(k) = B_{ji}(-k)\ . \tag{5}$$

Furthermore, requirements of relativistic invariance make very hard restrictions for $B_{ij}(k)$. Let us fix some point $k^{(0)}$ on the mass surface. If we know the value of the function $B_{ij}(k)$ in this point, then, using relativistic invariance, we can define it in the other points. The value $B_{ij}(k^{(0)})$ is not arbitrary also: it must be invariant under action of the little group $\mathcal{L}_{k^{(0)}}$.

The fact that the Poisson bracket is a complexified real bracket makes another restriction for $B_{ij}(k)$: $B^*_{ij}(k) = B_{ij}(-k)$. Taking into account (5) we can write it also as $B^*_{ij}(k) = B_{ji}(k)$.

Consider now the values $a_i(+k^{(0)})$ and $a_i(-k^{(0)})$. As it was shown in the section 2, they form a representation of the little group $\mathcal{L}_{k^{(0)}}$. It is obvious also that these values form a representation of the group of shifts[1]. A shift by 4-vector l can be described by the formulas:

$$a_i(k^{(0)}) \to a_i(k^{(0)}) \cdot e^{+ik^{(0)}l} , \qquad a_i(-k^{(0)}) \to a_i(-k^{(0)}) \cdot e^{-ik^{(0)}l} .$$

Let us introduce a notation $\tau = k^{(0)}l$. Then we can think that the values $a_i(+k^{(0)})$ and $a_i(-k^{(0)})$ form a representation of the group $\mathbb{R} \times \mathcal{L}_{k^{(0)}}$, where $\mathbb{R}$ is the additive group of real numbers, parameterized by the number τ .

Let us consider now the values $a_i(+k^{(0)})$ and $a_i(-k^{(0)})$ as dynamical variables of some new system. We will call this system a *field oscillator*. In order to economize notations we will write variables of the field oscillator with the same symbols, but we will write as an argument not the vector $k^{(0)}$ but a real number ω ; and $\omega = +1$ corresponds to $k = +k^{(0)}$, and $\omega = -1$ corresponds to $k = -k^{(0)}$. The phase space of the field oscillator can be constructed by realification of the space of inducing representation. The Poisson bracket can be defined by the formulas:

$$\{ a_i(+1) , a_j(+1) \} = \{ a_i(-1) , a_j(-1) \} = 0 ,$$
$$\{ a_i(+1) , a_j(-1) \} = iB_{ij}(+1) .$$

Assuming that the Poisson bracket is not degenerate we can, as usually, calculate the symplectic structure.

The action of the group $\mathbb{R} \times \mathcal{L}_{k^{(0)}}$ on the phase space of the field oscillator leaves the Poisson brackets invariant. Therefore it is symplectic.

Now we can interpret the action of a transformation from $\mathbb{R}$, characterized by the parameter τ , as a time shift by the time period τ (the “time” of the field oscillator is a non-dimensional parameter).

We can even define “coordinates” of the field oscillator at “time” t :

$$\varphi_i(t) = \tfrac{1}{\sqrt{2}} \left(a_i(+1) \cdot e^{-it} + a_i(-1) \cdot e^{+it} \right) .$$

We see that the oscillator of a real field has real coordinates.

If we consider the little group $\mathcal{L}_{k^{(0)}}$ as an abstract group, then it does not depend on the choice of the vector $k^{(0)}$. If we describe the oscillator by internal notions of the Hamiltonian formalism (phase space, symplectic structure, symplectic action of the group $\mathbb{R} \times \mathcal{L}_{k^{(0)}}$), then its construction does not depend on the choice of the vector $k^{(0)}$ also. So, for any $\mathcal{P}$ -invariant field we can uniquely juxtapose $\mathbb{R} \times \mathcal{L}_{k^{(0)}}$ - invariant field oscillator.

4. Scalar field representation. Let us apply now the described scheme to the scalar field. The inducing representation in this case is the one-dimensional identity representation. The field oscillator is just the usual real oscillator with one degree of freedom.

So, with respect to the action of the Poincare group, the space $Z^*_{\mathbb{C}}$ decomposes into the direct sum of the positive- and the negative-frequency reducing subspaces, and each of these subspaces is irreducible. These two subspaces we will denote $Z^{*\,(+)}_{\mathbb{C}}$ and $Z^{*\,(-)}_{\mathbb{C}}$. The projections of elements of the space $Z^*_{\mathbb{C}}$ to these two spaces we will provide with labels $^{(+)}$ or $^{(-)}$, correspondingly:

$$\widetilde{\varphi}^{\,(\pm)}(k) = \theta(\pm k)\, \widetilde{\varphi}(k) , \qquad \varphi^{\,(\pm)}(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\, e^{-ikx}\, \widetilde{\varphi}^{\,(\pm)}(k) .$$

Using formulas from the paper [I], we can calculate the Poisson brackets of these projections:

$$\{ \widetilde{\varphi}^{\,(\pm)}(k) , \widetilde{\varphi}^{\,(\pm)}(k') \} = 0 ,$$

[1] Speaking more generally, these values form a representation of the seven-parameter subgroup of the Poincare group that includes the little group $\mathcal{L}_{k^{(0)}}$ and shifts.

$$\{ \widetilde{\varphi}^{(\pm)}(k) \, , \, \widetilde{\varphi}^{(\mp)}(k') \} = - \Big[i \, \theta(\pm k) \, \varepsilon(k) \cdot 2\pi \, \delta(k^2 - m^2) \Big] \cdot (2\pi)^4 \delta(k + k') \ .$$

In the coordinate representation we have, correspondingly:

$$\{ \varphi^{(\pm)}(x) \, , \, \varphi^{(\pm)}(x') \} = 0 \ ,$$

$$\{ \varphi^{(\pm)}(x) \, , \, \varphi^{(\mp)}(x') \} = - D_m^{(\pm)}(x - x') \ .$$

Here symbols $D_m^{(+)}(y)$ and $D_m^{(-)}(y)$ denote the positive and the negative-frequency parts of the function $D_m(y)$:

$$D_m^{(\pm)}(y) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \, e^{-iky} \cdot \Big[i \, \theta(\pm k) \, \varepsilon(k) \cdot 2\pi \, \delta(k^2 - m^2) \Big] \ . \tag{6}$$

The given formulas turn out to be very useful for calculation of propagators of the quantized field. But they naturally follow from the classical theory.

5. Electromagnetic field representation. According to the section 2, the representation of the non-physical electromagnetic field decomposes also into the direct sum of positive- and negative-frequency representations. The formulas of the section 4 can be rewritten in the following way:

$$\widetilde{A}_\mu^{(\pm)}(k) = \theta(\pm k) \, \widetilde{A}_\mu(k) \ , \qquad A_\mu^{(\pm)}(x) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \, e^{-ikx} \, \widetilde{A}_\mu^{(\pm)}(k) \ ,$$

$$\{ \widetilde{A}_\mu^{(\pm)}(k) \, , \, \widetilde{A}_\nu^{(\pm)}(k') \} = 0 \ ,$$

$$\{ \widetilde{A}_\mu^{(\pm)}(k) \, , \, \widetilde{A}_\nu^{(\mp)}(k') \} = g_{\mu\nu} \cdot \Big[i \, \theta(\pm k) \, \varepsilon(k) \cdot 2\pi \, \delta(k^2) \Big] \cdot (2\pi)^4 \delta(k + k') \ ,$$

$$\{ A_\mu^{(\pm)}(x) \, , \, A_\nu^{(\pm)}(x') \} = 0 \ ,$$

$$\{ A_\mu^{(\pm)}(x) \, , \, A_\nu^{(\mp)}(x') \} = g_{\mu\nu} \, D_0^{(\pm)}(x - x') \ .$$

Here $D_0^{(\pm)}(y)$ are functions (6) with $m = 0$. In this case they can be written also as:

$$D_0^{(\pm)}(y) = \frac{1}{i \, (2\pi)^2} \cdot \frac{1}{\pm \, y^2 - i \, 0 \cdot \varepsilon(y)} = \frac{1}{4\pi} \, \varepsilon(y) \, \delta(y^2) \pm \frac{1}{i \, (2\pi)^2} \, \mathcal{P} \, \frac{1}{y^2} \ .$$

The inducing representation in this case is the complex vector representation of the little group $\mathcal{L}_{k^{(0)}}$ with $(k^{(0)})^2 = 0$. A more detailed description of this representation is given in the paper [V]. It has two composition series:

$$\{0\} = M_{\mathbb{C}}^0 \subset M_{\mathbb{C}}^{\parallel} \subset M_{\mathbb{C}}^{(+1)} \subset M_{\mathbb{C}}^{\perp} \subset M_{\mathbb{C}}^4 = M_{\mathbb{C}} \ ,$$

$$\{0\} = M_{\mathbb{C}}^0 \subset M_{\mathbb{C}}^{\parallel} \subset M_{\mathbb{C}}^{(-1)} \subset M_{\mathbb{C}}^{\perp} \subset M_{\mathbb{C}}^4 = M_{\mathbb{C}} \ .$$

Under induction these two composition series turn into composition series of the field representation.

$$\{0\} = Z_{\mathbb{C}}^{*\,(+)\,0} \subset Z_{\mathbb{C}}^{*\,(+)\,\parallel} \subset Z_{\mathbb{C}}^{*\,(+)\,(+1)} \subset Z_{\mathbb{C}}^{*\,(+)\,\perp} \subset Z_{\mathbb{C}}^{*\,(+)\,4} = Z_{\mathbb{C}}^{*\,(+)} \ ,$$

$$\{0\} = Z_{\mathbb{C}}^{*\,(+)\,0} \subset Z_{\mathbb{C}}^{*\,(+)\,\parallel} \subset Z_{\mathbb{C}}^{*\,(+)\,(-1)} \subset Z_{\mathbb{C}}^{*\,(+)\,\perp} \subset Z_{\mathbb{C}}^{*\,(+)\,4} = Z_{\mathbb{C}}^{*\,(+)} \ .$$

Here the notations for the subspaces are in natural concordance with the notations of the paper [I].

The field oscillator in this case turns out to be a system with eight-dimensional phase space.

In connection with the division of the field into the positive- and the negative-frequency parts, let us notice also that so far as electromagnetic field is real, the Lorentz condition for scattered states can be written in three equivalent forms:

$$- \, i \, k_\mu \, a_\mu(k) \, \underline{\overline{\mathrm{rad}}} = 0 \ ,$$

$$- \, i \, k_\mu \, a_\mu^{(+)}(k) \, \underline{\overline{\mathrm{rad}}} = 0 \ ,$$

$$- \, i \, k_\mu \, a_\mu^{(-)}(k) \, \underline{\overline{\mathrm{rad}}} = 0 \ .$$

So far as positive- and negative-frequency parts of the field play different roles in quantization, in the paper [VI] we will see that in quantum theory there is an analog of only the second form of this condition.

References

[1] G. W. Mackey *„Predstavleniya grupp v gilbertovom prostranstve“*, appendix in the book [2]. [G. W. Mackey "Group representations in Hilbert space", appendix in the book [2].]

[2] I. E. Segal *„Matematicheskie problemy relyativistskoy fiziki“*, M.: Mir (1968). [I. E. Segal *"Mathematical problems of relativistic physics"*, Providence, Rhode island: AMS (1963).]

О квантовании электромагнитного поля.
IV. Теория полевых представлений.

Д. А. Арбатский*

7 февраля 2008 г.

arXiv:math-ph/0402003v1 4 Feb 2004

Аннотация

Вводится понятие об индуцированном симплектическом представлении группы Пуанкаре. Классические релятивистские поля рассматриваются как такие представления. Описывается методика исследования этих представлений в смысле их приводимости. Вводится понятие полевого осциллятора как индуцирующей гамильтоновой системы.

1. Симплектические представления. Группой Пуанкаре мы будем называть связную непрерывную десятипараметрическую группу преобразований пространства-времени, включающую в себя как однородные преобразования (группу Лоренца), так и пространственно-временные сдвиги. Мы будем обозначать группу Пуанкаре символом $\mathcal{P}$.

Поскольку в данном цикле статей мы изучаем поля, которые релятивистски инвариантны, всякое решение уравнений движения под действием преобразования из группы Пуанкаре переходит в решение. Таким образом, определяется действие группы Пуанкаре на инвариантном фазовом пространстве Z .

Более конкретно это действие можно описать так. Пусть задано преобразование $g \in \mathcal{P}$. На точки пространства-времени оно действует следующим образом:

$$x \ \to \ x' = gx \ .$$

В пространстве, где лежат значения полевой функции φ_i , преобразование g действует так:

$$\varphi_i \ \to \ \varphi'_i = \Lambda_{ij}\, \varphi_j \ .$$

Действие g в пространстве Z характеризуется формулами:

$$\underline{c} \longrightarrow \underline{gc} \ , \qquad \varphi_i(x)^{\underline{gc}} = \Lambda_{ij}\, \varphi_j(g^{-1}x)^{\underline{c}} \ . \tag{1}$$

Как уже было сказано в статье [I], мы здесь будем иметь дело с линейными полями. Действие группы Пуанкаре $\mathcal{P}$, очевидно, сохраняет линейную структуру в пространстве Z . Таким образом, в пространстве Z реализовано линейное представление группы Пуанкаре.

Кроме того, группа Пуанкаре сохраняет в пространстве Z симплектическую структуру. Таким образом, мы приходим к линейным *симплектическим* представлениям группы Пуанкаре $\mathcal{P}$. Связь симплектических представлений с унитарными станет ясна, когда мы определим операцию квантования поля в статье [VI]. Из проведённого там рассмотрения станет ясно, что симплектические представления, по-видимому, играют для теории поля роль не менее важную, чем унитарные. Во-всяком случае, с конструкцией квантованного поля они связаны более непосредственно.

2. „Приведение“ полевых представлений. Рассмотрим теперь вопрос о приводимости полевых представлений группы Пуанкаре $\mathcal{P}$. Приводимость будет здесь пониматься в комплексном смысле. Чтобы не комплексифицировать пространство Z , будем рассматривать комплексифицированное сопряжённое пространство $Z^*_{\mathbb{C}}$. В $Z^*_{\mathbb{C}}$, очевидно, действует сопряжённое представление группы $\mathcal{P}$. Чтобы определить это действие, нужно формулу (1) прочитать немного иначе:

$$\varphi_i(x)^{\underline{\cdot}} \longrightarrow \big(g\, \varphi_i(x)\big)^{\underline{\cdot}} \ , \qquad \big(g\, \varphi_i(x)\big)^{\underline{c}} = \Lambda_{ij}\, \varphi_j(g^{-1}x)^{\underline{c}} \ , \tag{2}$$

*http://d-a-arbatsky.narod.ru/

т. е. отнести символ g не к элементу Z, а к элементу $Z^*_{\mathbb{C}}$. В дальнейшем под полевым представлением мы будем понимать действие группы Пуанкаре по формуле (2) в комплексифицированном сопряжённом пространстве $Z^*_{\mathbb{C}}$.

Для бесконечномерных представлений понятие приводимости требует уточнения. Сейчас мы разъясним, как устроены полевые представления, которые мы здесь будем рассматривать, и одновременно уточним, в каком смысле мы будем понимать приводимость.

В случае унитарных представлений основным инструментом исследования является теорема Макки (см., например, [1]). Эта теорема сводит исследование представления группы Пуанкаре $\mathcal{P}$ к исследованию соответствующего представления малой группы Лоренца $\mathcal{L}_k$. Конструкцию индуцирования по Макки можно распространить и на произвольные линейные представления. Однако, общее линейное представление (в том числе симплектическое) группы $\mathcal{P}$ может и не быть индуцированным с малой группы. Тем не менее, представления, индуцированные по Макки, составляют весьма широкий класс и мы здесь фактически ими ограничимся.

Произведём преобразование Фурье поля и представим фурье-образ в виде:

$$\widetilde{\varphi}_i(k) = 2\pi\,\delta(k^2 - m^2)\cdot a_i(k)\ . \tag{3}$$

Величину m естественно назвать, как и в квантовой теории, массой поля.

На основании формулы (3) естественно считать, что полевое представление распадается в прямую сумму положительно- и отрицательно-частотных подпредставлений:

$$Z^*_{\mathbb{C}} = Z^{*\,(+)}_{\mathbb{C}} \oplus Z^{*\,(-)}_{\mathbb{C}}\ .$$

Эти два представления мы также будем называть полевыми. Проекторы на положительно- и отрицательно-частотные подпространства в фурье-представлении устроены как операторы умножения на функции $\theta(+k)$ и $\theta(-k)$, соответственно.

Далее, поскольку мы имеем здесь дело с вещественными полями, $a_i(-k) = a^*_i(k)$. Поэтому естественно считать, что каждое из подпространств $Z^{*\,(+)}_{\mathbb{C}}$ и $Z^{*\,(-)}_{\mathbb{C}}$ приводимо ровно в той же мере, что и другое. В связи с этим можно ограничиться положительно-частотным подпространством.

Зафиксируем теперь вектор $k^{(0)}$ на массовой поверхности: $(k^{(0)})^2 = m^2$. Рассмотрим подгруппу группы Лоренца, оставляющую этот вектор неизменным, т. е. так называемую малую группу данного вектора. Обозначим эту группу $\mathcal{L}_{k^{(0)}}$. Очевидно, набор величин $a_i(k^{(0)})$, соответствующий различным значениям индекса i, преобразуется линейно под действием преобразований из $\mathcal{L}_{k^{(0)}}$. Это комплексное представление малой группы мы будем считать конечномерным. Аналогично унитарному случаю, будем говорить, что рассматриваемое полевое представление индуцировано данным представлением малой группы.

Будем далее по аналогии с унитарным случаем считать, что дальнейшая приводимость полевого представления (т. е. приведение его положительно-частотной части) целиком определяется приводимостью индуцирующего представления.

Заметим здесь ещё, что в случае массивных полей, т. е. когда $m > 0$, малая группа $\mathcal{L}_{k^{(0)}}$ является группой трёхмерных вращений $SO(3)$. Эта группа компактна, и, следовательно, её представление может быть сделано унитарным путём введения надлежащего скалярного произведения. Поэтому индуцирующее представление оказывается вполне приводимым, и классы эквивалентности неприводимых компонент, так же как и в унитарном случае, определяются единственным целым или полуцелым числом. Это число, имея в виду связь с квантовым случаем, естественно назвать *спином* рассматриваемой неприводимой компоненты.

В случае же безмассового поля малая группа, как известно, является группой движений евклидовой плоскости $E(2)$. Эта группа некомпактна, и ситуация существенно усложняется по сравнению с унитарным случаем. Скоро мы это увидим на примере электромагнитного поля.

3. Полевой осциллятор как индуцирующая гамильтонова система. Нетрудно заметить, что между описаниями гармонического осциллятора и скалярного поля существует большое сходство. Сейчас мы изучим это явление более детально.

Рассмотрим произвольное вещественное поле, которое в фурье-представлении записывается в виде (3). Пусть скобки Пуассона полевых величин, взятых в фурье-представлении, имеют вид:

$$\{\,\widetilde{\varphi}_i(k)\,,\,\widetilde{\varphi}_j(k')\,\} = B_{ij}(k)\cdot\Big[\,i\,\varepsilon(k)\cdot 2\pi\,\delta(k^2 - m^2)\Big]\cdot(2\pi)^4\delta(k + k')\ . \tag{4}$$

Здесь $B_{ij}(k)$ — некоторая тензорная функция. В случае скалярного поля и нефизического электромагнитного поля, как следует из формул статьи [I], эта функция просто является константой. В общем случае это, однако, не так. Рассмотрим поэтому её свойства более подробно.

Во-первых, поскольку $B_{ij}(k)$ домножается на $2\pi\,\delta(k^2-m^2)$, можно считать, что она задана только на массовой поверхности $k^2=m^2$. Во-вторых, используя антисимметрию скобки Пуассона, получаем:

$$B_{ij}(k)=B_{ji}(-k)\ . \tag{5}$$

Далее, требования релятивистской инвариантности накладывают на функцию $B_{ij}(k)$ очень жёсткие ограничения. Зафиксируем на массовой поверхности какую-нибудь точку $k^{(0)}$. Если известно значение функции $B_{ij}(k)$ в этой точке, то, используя лоренц-инвариантность, можно определить её значения во всех остальных точках. Значение же $B_{ij}(k^{(0)})$ также не является произвольным: оно должно быть инвариантным по отношению к действию малой группы $\mathcal{L}_{k^{(0)}}$.

То, что скобка Пуассона является комплексификацией вещественной, накладывает на $B_{ij}(k)$ ещё одно условие: $B^*_{ij}(k)=B_{ij}(-k)$. С учётом (5) его также можно записать в виде $B^*_{ij}(k)=B_{ji}(k)$.

Рассмотрим теперь величины $a_i(+k^{(0)})$ и $a_i(-k^{(0)})$. Как было указано в пункте 2, они образуют представление малой группы $\mathcal{L}_{k^{(0)}}$. Очевидно также, что указанные величины образуют представление группы сдвигов[1]. Сдвиг на 4-вектор l описывается формулами:

$$a_i(k^{(0)})\;\to\;a_i(k^{(0)})\cdot e^{+ik^{(0)}l}\ ,\qquad a_i(-k^{(0)})\;\to\;a_i(-k^{(0)})\cdot e^{-ik^{(0)}l}\ .$$

Введём обозначение $\tau=k^{(0)}l$. Можно тогда считать, что величины $a_i(+k^{(0)})$ и $a_i(-k^{(0)})$ образуют представление группы $\mathbb{R}\times\mathcal{L}_{k^{(0)}}$, где $\mathbb{R}$ — аддитивная группа вещественных чисел, параметризованная числом τ.

Будем теперь рассматривать величины $a_i(+k^{(0)})$ и $a_i(-k^{(0)})$ как динамические переменные некоторой новой системы. Эту систему мы будем называть *полевым осциллятором.* С целью экономии обозначений будем записывать переменные полевого осциллятора теми же символами, но в качестве аргумента будем писать не вектор $k^{(0)}$, а вещественное число ω; причём $\omega=+1$ соответствует $k=+k^{(0)}$, и $\omega=-1$ соответствует $k=-k^{(0)}$. Фазовое пространство полевого осциллятора получается овеществлением пространства индуцирующего представления. Скобку Пуассона зададим формулами:

$$\{\,a_i(+1)\,,\,a_j(+1)\,\}=\{\,a_i(-1)\,,\,a_j(-1)\,\}=0\ ,$$

$$\{\,a_i(+1)\,,\,a_j(-1)\,\}=\,iB_{ij}(+1)\ .$$

Предполагая невырожденность скобки Пуассона, можно, как обычно, вычислить и симплектическую структуру.

Действие группы $\mathbb{R}\times\mathcal{L}_{k^{(0)}}$ на фазовом пространстве полевого осциллятора оставляет неизменной скобку Пуассона. Следовательно, оно является симплектическим.

При этом действие преобразования из $\mathbb{R}$, характеризуемого параметром τ, мы можем интерпретировать как временной сдвиг на промежуток времени τ („время“ полевого осциллятора — параметр безразмерный).

Можно даже определить „координаты“ полевого осциллятора в „момент времени“ t:

$$\varphi_i(t)=\tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\,a_i(+1)\cdot e^{-it}+a_i(-1)\cdot e^{+it}\,\right)\ .$$

Видно, что у осциллятора вещественного поля координаты вещественны.

Далее, малая группа $\mathcal{L}_{k^{(0)}}$, как абстрактная группа, от выбора вектора $k^{(0)}$ не зависит. Если осциллятор описывать во внутренних терминах гамильтонова формализма (фазовое пространство, симплектическая структура, симплектическое действие группы $\mathbb{R}\times\mathcal{L}_{k^{(0)}}$), то его конструкция также от выбора $k^{(0)}$ не зависит. Таким образом, каждому $\mathcal{P}$-инвариантному полю однозначно сопоставляется $\mathbb{R}\times\mathcal{L}_{k^{(0)}}$-инвариантный полевой осциллятор.

4. Представление скалярного поля. Применим теперь изложенную схему к скалярному полю. Индуцирующее представление в этом случае является одномерным тождественным представлением. Полевой осциллятор — обычный вещественный осциллятор с одной степенью свободы.

Таким образом, по отношению к действию группы Пуанкаре пространство $Z^*_{\mathbb{C}}$ распадается в прямую сумму положительно- и отрицательно-частотных приводящих подпространств, каждое из которых неприводимо.

[1]Более обще можно сказать, что указанные величины образуют представление семипараметрической подгруппы группы Пуанкаре, включающей малую группу $\mathcal{L}_{k^{(0)}}$ и сдвиги.

Эти два подпространства мы обозначим $Z_{\mathbb{C}}^{*\,(+)}$ и $Z_{\mathbb{C}}^{*\,(-)}$. Проекции элементов пространства $Z_{\mathbb{C}}^{*}$ на эти два подпространства будем снабжать значками ${}^{(+)}$ или ${}^{(-)}$, соответственно:

$$\widetilde{\varphi}^{\,(\pm)}(k) = \theta(\pm k)\,\widetilde{\varphi}(k)\ , \qquad \varphi^{\,(\pm)}(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,e^{-ikx}\,\widetilde{\varphi}^{\,(\pm)}(k)\ .$$

Используя формулы из статьи [I], можно вычислить скобки Пуассона этих проекций:

$$\{\,\widetilde{\varphi}^{\,(\pm)}(k)\,,\,\widetilde{\varphi}^{\,(\pm)}(k')\,\} = 0\ ,$$

$$\{\,\widetilde{\varphi}^{\,(\pm)}(k)\,,\,\widetilde{\varphi}^{\,(\mp)}(k')\,\} = -\Big[\,i\,\theta(\pm k)\,\varepsilon(k)\cdot 2\pi\,\delta(k^2-m^2)\Big]\cdot(2\pi)^4\delta(k+k')\ .$$

В координатном представлении имеем, соответственно:

$$\{\,\varphi^{\,(\pm)}(x)\,,\,\varphi^{\,(\pm)}(x')\,\} = 0\ ,$$

$$\{\,\varphi^{\,(\pm)}(x)\,,\,\varphi^{\,(\mp)}(x')\,\} = -D_m^{(\pm)}(x-x')\ .$$

Здесь символами $D_m^{(+)}(y)$ и $D_m^{(-)}(y)$ обозначены положительно- и отрицательно-частотная части функции $D_m(y)$:

$$D_m^{(\pm)}(y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,e^{-iky}\cdot\Big[\,i\,\theta(\pm k)\,\varepsilon(k)\cdot 2\pi\,\delta(k^2-m^2)\Big]\ . \tag{6}$$

Приведённые формулы оказываются весьма полезными при вычислении пропагаторов квантованного поля. При этом сами по себе они естественно вытекают из классической теории.

5. Представление электромагнитного поля. Представление нефизического электромагнитного поля, согласно пункту 2, также распадается в прямую сумму положительно- и отрицательно-частотных подпредставлений. Формулы пункта 4 переписываются следующим образом:

$$\widetilde{A}_\mu^{(\pm)}(k) = \theta(\pm k)\,\widetilde{A}_\mu(k)\ , \qquad A_\mu^{(\pm)}(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,e^{-ikx}\,\widetilde{A}_\mu^{(\pm)}(k)\ ,$$

$$\{\,\widetilde{A}_\mu^{(\pm)}(k)\,,\,\widetilde{A}_\nu^{(\pm)}(k')\,\} = 0\ ,$$

$$\{\,\widetilde{A}_\mu^{(\pm)}(k)\,,\,\widetilde{A}_\nu^{(\mp)}(k')\,\} = g_{\mu\nu}\cdot\Big[\,i\,\theta(\pm k)\,\varepsilon(k)\cdot 2\pi\,\delta(k^2)\Big]\cdot(2\pi)^4\delta(k+k')\ ,$$

$$\{\,A_\mu^{(\pm)}(x)\,,\,A_\nu^{(\pm)}(x')\,\} = 0\ ,$$

$$\{\,A_\mu^{(\pm)}(x)\,,\,A_\nu^{(\mp)}(x')\,\} = g_{\mu\nu}\,D_0^{(\pm)}(x-x')\ .$$

Здесь $D_0^{(\pm)}(y)$ — функции (6) при $m=0$. В этом случае эти функции также можно записать в виде:

$$D_0^{(\pm)}(y) = \frac{1}{i\,(2\pi)^2}\cdot\frac{1}{\pm\,y^2 - i\,0\cdot\varepsilon(y)} = \frac{1}{4\pi}\,\varepsilon(y)\,\delta(y^2) \pm \frac{1}{i\,(2\pi)^2}\,\mathcal{P}\,\frac{1}{y^2}\ .$$

Индуцирующее представление в этом случае — это комплексное векторное представление малой группы $\mathcal{L}_{k^{(0)}}$ при $(k^{(0)})^2=0$. Подробное описание этого представления имеется в статье [V]. Оно имеет два композиционных ряда:

$$\{0\} = M_{\mathbb{C}}^0 \subset M_{\mathbb{C}}^{\parallel} \subset M_{\mathbb{C}}^{(+1)} \subset M_{\mathbb{C}}^{\perp} \subset M_{\mathbb{C}}^4 = M_{\mathbb{C}}\ ,$$

$$\{0\} = M_{\mathbb{C}}^0 \subset M_{\mathbb{C}}^{\parallel} \subset M_{\mathbb{C}}^{(-1)} \subset M_{\mathbb{C}}^{\perp} \subset M_{\mathbb{C}}^4 = M_{\mathbb{C}}\ .$$

При индуцировании эти композиционные ряды переходят в композиционные ряды полевого представления:

$$\{0\} = Z_{\mathbb{C}}^{*\,(+)\,0} \subset Z_{\mathbb{C}}^{*\,(+)\,\parallel} \subset Z_{\mathbb{C}}^{*\,(+)\,(+1)} \subset Z_{\mathbb{C}}^{*\,(+)\,\perp} \subset Z_{\mathbb{C}}^{*\,(+)\,4} = Z_{\mathbb{C}}^{*\,(+)}\ ,$$

$$\{0\} = Z_{\mathbb{C}}^{*\,(+)\,0} \subset Z_{\mathbb{C}}^{*\,(+)\,\parallel} \subset Z_{\mathbb{C}}^{*\,(+)\,(-1)} \subset Z_{\mathbb{C}}^{*\,(+)\,\perp} \subset Z_{\mathbb{C}}^{*\,(+)\,4} = Z_{\mathbb{C}}^{*\,(+)}\ .$$

Здесь обозначения для подпространств естественно согласованы с обозначениями статьи [I].

Полевой осциллятор в данном случае оказывается системой с восьмимерным фазовым пространством.

В связи с разделением поля на положительно- и отрицательно-частотные части, отметим также, что поскольку электромагнитное поле вещественно, условие Лоренца на состояния рассеяния можно записать тремя эквивалентными способами:

$$- i\, k_\mu\, a_\mu(k) \,\underline{\mathrm{rad}} = 0 \ ,$$

$$- i\, k_\mu\, a_\mu^{(+)}(k) \,\underline{\mathrm{rad}} = 0 \ ,$$

$$- i\, k_\mu\, a_\mu^{(-)}(k) \,\underline{\mathrm{rad}} = 0 \ .$$

Поскольку при квантовании положительно- и отрицательно-частотные части поля играют различные роли, то, как станет ясно из статьи [VI], в квантовой теории имеется аналог лишь второго варианта этого условия.

Список литературы

[1] Дж. Макки *„Представления групп в гильбертовом пространстве“*, приложение в кн. [2]. [G. W. Mackey “Group representations in Hilbert space”, appendix in the book [2].]

[2] И. Сигал *„Математические проблемы релятивистской физики“*, М.: Мир (1968). [I. E. Segal *“Mathematical problems of relativistic physics”*, Providence, Rhode island: AMS (1963).]

arXiv:math-ph/0402003v1 4 Feb 2004

On quantization of electromagnetic field. V. Vector representation of little Lorentz group for light-like momentum.

D. A. Arbatsky*

February 7, 2008

Abstract

Using elementary geometric methods we prove the isomorphism of the little Lorentz group for light-like momentum and the group of motions of a Euclidian plane. In accordance with Jordan-Hölder-Noether theorem we perform "reduction" or the real and complex vector representations of this group. We also prove indecomposability of these representations.

1. Preliminary remarks. There are quite many books devoted to the theory of the Lorentz group $\mathfrak{L}$ and the theory of representations of this group. Among them there are monographs specially devoted to this topic; for example, [1, 2, 3]. It is mentioned in all them that the little Lorentz group $\mathfrak{L}_k$ for a light-like momentum[1] k is isomorphic to the group of motions of a Euclidian plane $E(2)$. The proof that is usually provided is usually based on an analytic investigation of the group $SL(2,\mathbb{C})$ which is the universal covering group of the Lorentz group.

Such an approach seems to be optimal if we want to study then arbitrary (including two-valued) representations of the group $\mathfrak{L}_k$. At the same time it turns out to be very difficult to realize the geometric sense of the isomorphism of $\mathfrak{L}_k$ and $E(2)$ [2].

Let us specify here what is usually implied when we talk about "geometric sense". From the point of view of physical applications the Lorentz group is most naturally defined by its vector representation[3]. And the little group $\mathfrak{L}_k$ is defined just as the stationary subgroup of the vector k . The group $E(2)$ in its turn is defined as the group of motions of a Euclidean plane. Taking into account these definitions of the groups $\mathfrak{L}_k$ and $E(2)$ and using purely geometric constructions we will find some two-dimensional plane, possessing natural Euclidean structure, where the group $\mathfrak{L}_k$ acts as the group of motions.

Another question that we will study here (and which is the main motivation for publishing of this paper) is the "reduction" of vector representation of the group $\mathfrak{L}_k$, i. e. we will expose what irreducible representations it consists of. From the point of view of the general representation theory, this case is very particular and does not contain any specific difficulties. Nevertheless, taking into account its great practical importance, it seems to be useful to perform its investigation with using constructions that are closest to our geometric intuition.

Real vector representation

2. Notations and terminology. *The Minkowski space* M is a four-dimensional real linear space $\mathbb{R}^4$, where we have real symmetrical bilinear form $g(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ with the signature $(+,-,-,-)$. This form is called *scalar product.* For short, instead of writing $g(a,b)$, we will write just ab or $a\cdot b$.

Consider now the group of all linear transformations of the Minkowski space M preserving the scalar product. The connected component of this group containing neutral element is a group also. This latter group we will call *the Lorentz group* and we will denote it $\mathfrak{L}$.

*http://d-a-arbatsky.narod.ru/

[1] The word "momentum" is used because we keep in mind applications to the theory of zero-mass fields; in particular electromagnetic. While we perform purely mathematical investigation, we can suppose that we talk about any isotropic vector k : $k^2=0$.

[2] In particular, Ryder [4] noted about it that the physical meaning of this result is unclear.

[3] Such a representation is sometimes called "fundamental".

In this paper we will consider only the vector representation of the Lorentz group, i. e. the representation in the Minkowski space. This representation will be denoted as T .

The little group of a vector k is the stationary subgroup of the vector k , i. e. the subgroup of the Lorentz group leaving the vector k unchanged. It will be denoted as $\mathfrak{L}_k$.

A vector k is called *time-like*, if $k^2 > 0$; *light-like* or *isotropic*, if $k^2 = 0$; and *space-like*, if $k^2 < 0$.

Consider also the group of all transformations of a Euclidean plane preserving distances. The connected component of this group containing neutral element is a group also. We will call it *the group of motions of a Euclidean plane* and denote it $E(2)$.

3. Reducing subspaces. Following the Jordan-Hölder-Noether theorem let us immediately guess a composition series of the representation T , i. e. such a monotonic set of reducing subspaces of the representation T that corresponding successive factor-representations are irreducible:

$$\{0\} = M^0 \subset M^{\parallel} \subset M^{\perp} \subset M^4 = M \ . \tag{1}$$

Here M^0 is the zero subspace in M ; $M^{\parallel}$ is the subspace containing all vectors parallel to k ; $M^{\perp}$ is the subspace containing all vectors orthogonal to k ; M^4 is another notation for the Minkowski space.

Each of these subspaces is obviously invariant with respect to the action of the group $\mathfrak{L}_k$. The subrepresentations in the subspaces $M^{\parallel}$ and $M^{\perp}$ we denote $T^{\parallel}$ and $T^{\perp}$, correspondingly.

For the set (1) we have the corresponding sequence of the three successive factor-representations in the factor-spaces $M^{\parallel}/M^0 = M^{\parallel}$, $M^{\perp}/M^{\parallel} = M^{\perp/\parallel}$ and $M^4/M^{\perp} = M^{4/\perp}$. The first of these factor-representations is a subrepresentation. We have already denoted it as $T^{\parallel}$. The second and the third factor-representations we denote $T^{\perp/\parallel}$ and $T^{4/\perp}$, correspondingly.

The irreducibility of the factor-representations $T^{\parallel}$ and $T^{4/\perp}$ is undoubted because they are one-dimensional. As regards the factor-representation $T^{\perp/\parallel}$, its irreducibility (real) will be proved in the section 6.

In the sections 7 and 8 we will prove two lemmas that have as a consequence that besides the subspaces (1) the representation T does not have any other reducing subspaces. So, the composition series (1) is the only one. Therefore in this case the statement of the Jordan-Hölder-Noether theorem that all composition series are of the same length and corresponding factor-representations of these series are equivalent turns out to be trivial.

4. Homomorphism $\mathfrak{L}_k$ into $E(2)$. Consider now in the Minkowski space a three-dimensional hyperplane N defined by the equation:

$$k \cdot x = const \neq 0 \ . \tag{2}$$

So far as the group $\mathfrak{L}_k$ leaves the vector k unchanged and preserves the scalar product, the hyperplane N is invariant with respect to the action of the group $\mathfrak{L}_k$.

Let us introduce now an equivalence relation $\sim$ for vectors from N :

$$a \sim b \quad \Longleftrightarrow \quad a - b \in M^{\parallel} \ , \tag{3}$$

In other words, two vectors are equivalent if their ends belong to a line parallel to k . Because of (1) and (2) every such a line completely lies in the hyperplane N . Making factorization of N with respect to the equivalence relation (3) we get some two-dimensional plane[4] $\widetilde{N}$. We will denote points from $\widetilde{N}$ and lines corresponding to them on N by the same symbols: $\widetilde{a}$, $\widetilde{c}$ etc.

The plane $\widetilde{N}$ has natural Euclidean structure. Really, let us take two arbitrary points $\widetilde{a}$ and $\widetilde{c}$ on $\widetilde{N}$. Both of them are equivalence classes of points on N . Let us take a one arbitrary representative for each of the two classes: a and c , correspondingly. Let us calculate the value

$$\rho\,(a, c) = \sqrt{(a - c)^2} \ . \tag{4}$$

This value does not depend on the choice of the representatives a and c . Really, let us substitute, for example, a with $a + \alpha k$. Taking into account (2), we have:

$$\rho\,(a + \alpha k, c) = \sqrt{(a - c + \alpha k)^2} = \sqrt{(a - c)^2 + 2\alpha(ka - kc) + \alpha^2 k^2} = \sqrt{(a - c)^2} = \rho\,(a, c) \ .$$

[4] The plane $\widetilde{N}$ is not *imbedded* into the Minkowski space.

What is more, $(a-c)^2$ is always greater than zero and the function $\rho(\cdot\,,\,\cdot)$ have all properties of Euclidean metric, because the plane $\widetilde{N}$ can be identified with any of space-like two-dimensional planes lying in N .

Note now that the equivalence relation (3) and metric $\rho(\cdot\,,\,\cdot)$ are invariant with respect to the action of the little group $\mathfrak{L}_k$. So, we have constructed a homomorphous mapping of the group $\mathfrak{L}_k$ into the group of motions $E(2)$ of the Euclidean plane $\widetilde{N}$.

5. Inverse mapping. Later on we will repeatedly use the following two statements that are true in both the real and the complex cases.

S t a t e m e n t. *If a linear transformation changes some basis $\{n^i\}_{i=1..4}$ so that scalar products of all elements of the basis remain unchanged (including squares of the elements of the basis), then this transformation preserves the scalar product.*

S t a t e m e n t. *If a linear transformation changes some basis $\{n^i\}_{i=1..4}$ so that all values $(n^i-n^j)^2$ and $(n^i)^2$ remain unchanged, then this transformation preserves the scalar product.*

The first statement follows from the fact that every vector can be decomposed into a linear combination of the elements of basis. The second statement follows from the first, if we take into account the formula:

$$(n^i-n^j)^2=(n^i)^2+(n^j)^2-2n^in^j\ .$$

Let us fix now an arbitrary motion of the plane $\widetilde{N}$. A transformation from the little group $\mathfrak{L}_k$, that transforms to this motion on $\widetilde{N}$ under the homomorphism constructed in the section 4, we will call *desired*. Let us show that the desired transformation from $\mathfrak{L}_k$ exists and it is unique. So, we will prove that the homomorphism under consideration is really an isomorphism.

For that consider a family of hypersurfaces defined by the equations like

$$x^2=const\ . \tag{5}$$

The intersection of any of them with the hyperplane N is a paraboloid. Every such a paraboloid is invariant with respect to the desired transformation. And every line representing a point from $\widetilde{N}$ intersects such a paraboloid exactly in one point, and for every point on the paraboloid there is exactly one such a line that contains this point. Therefore we have defined the action of the desired transformation on every paraboloid.

Let us take now on one of these paraboloids four points that do not lie in any two-dimensional plane. The four vectors $\{n^i\}_{i=1..4}$ that have their ends at these four points form a basis in M . The transformation on the paraboloid that we have just defined preserves values $(n^i-n^j)^2$, because each of these values is a square of the corresponding distance in $\widetilde{N}$. The values $(n^i)^2$ are also preserved because they are constant on the paraboloid. Let us linearly continue the constructed transformation of the vectors from the basis to the whole space M . It follows from the second statement formulated in the beginning of this section that we will get a transformation preserving the scalar product in M . And according to our construction, this transformation preserves the plane (2), and therefore it leaves the vector k unchanged. So far as the initial motion of the plane $\widetilde{N}$ was supposed to belong to the connected group $E(2)$, the constructed transformation in M also belongs to the connected group $\mathfrak{L}_k$.

The constructed transformation is the only one that can pretend to be the desired. On the other hand, the constructed transformation from $\mathfrak{L}_k$ under the homomorphism from the section 4 transforms into some motion on $\widetilde{N}$. This motion, in accordance with the construction, acts on the four points[5] $\widetilde{n}^i\in\widetilde{N}$ in exactly the same way as the initial motion in $\widetilde{N}$. So far as a motion in a Euclidean plane is uniquely defined even by its action on two not-coinciding points, the constructed transformation from $\mathfrak{L}_k$ is the desired. So, we have proved the

T h e o r e m. *The groups $\mathfrak{L}_k$ and $E(2)$ are isomorphic.*

6. Factor-representation $T^{\perp/\parallel}$. Similarly to the constructed in the section 4 factor-plane, the factor-space $M^{\perp/\parallel}$ has natural Euclidean structure[6], this structure is defined by the same formula (4). So, the little group $\mathfrak{L}_k$ acts in $M^{\perp/\parallel}$ as the group of rotations of a Euclidean plane over a fixed point. Such a group is denoted as $SO(2)$.

Obviously, in a Euclidean plane there is no such a direction that would be invariant under rotations. From this we get the

T h e o r e m. *The factor-representation $T^{\perp/\parallel}$ is irreducible (in the real sense).*

[5]The lines containing the ends of the vectors of basis $\{n^i\}_{i=1..4}$

[6]And what is more, $M^{\perp/\parallel}$ is linear, and there is the corresponding scalar product in it: $\widetilde{a}\cdot\widetilde{c}=ac$.

7. Indecomposability of representation T . Let us suppose that the representation T is decomposable, i. e. the space M can be represented as a direct sum $M = M' \oplus M''$ of two non-trivial reducing spaces M' and M'' . One of these spaces, for example M' , necessarily contains some vector that does not belong to $M^{\perp}$. If we properly choose the constant in the equation (2), the end of this vector will lie in the plane N . It was shown in the section 5 that by transformations from $\mathcal{L}_k$ this vector can be transformed into any other vector, if the end of the latter lies on the same paraboloid. In particular, it can be transformed into four vectors $\{n^i\}_{i=1..4}$ forming a basis in M . Therefore, M' must coincide with the whole M . So, we have proved the

L e m m a. *Every reducing subspace of the representation T either coincides with the whole M or lies in $M^{\perp}$.*

From this lemma we get the

T h e o r e m. *The representation T is indecomposable.*

8. Indecomposability of representation $T^{\perp}$. Consider a cylinder defined by equations:

$$k \cdot x = 0 \,, \qquad x^2 = const \neq 0 \,. \tag{6}$$

Let us prove that $\mathcal{L}_k$ acts transitively on it, i. e. every point on the cylinder can be transformed to any other. Let us denote the vector that have the end in the initial point as $e^1(0)$, and the vector that have the end in the final point as $e^1(1)$. So far as the cylinder is connected, these two points can be connected by a continuous curve $e^1(t)$, $t \in [0;1]$.

Let us introduce now a vector $e^2(t)$ which continuously depends on t . Let us require that the end of the vector $e^2(t)$ always lies on the same cylinder of the type (6). Furthermore, we require that the scalar product $e^1(t) \cdot e^2(t) = const$ does not depend on t . And what is more, we require that the vectors k , $e^1(t)$ and $e^2(t)$ are linearly independent when $t = 0$ and, therefore, they are linearly independent with any t .

The vector $e^2(t)$ is not defined uniquely, of course. It always can be substituted by $e^2(t) + \alpha(t)\, k$, where $\alpha(t)$ is an arbitrary continuous function. We will not eliminate this non-uniqueness in any way.

Let us use the three vectors k , $e^1(t)$ and $e^2(t)$ as a basis in $M^{\perp}$. Using the three-dimensional version of the first statement from the section 5 we get a continuous family of linear transformations in $M^{\perp}$ which preserve the scalar product in $M^{\perp}$.

Let us prove now that these transformations can be completed as transformations from $\mathcal{L}_k$. For this let us take an arbitrary vector $n(0)$ that does not belong to the subspace $M^{\perp}$. The vectors k , $e^1(t)$, $e^2(t)$ and $n(0)$ form a basis in the Minkowski space M . Let us show now that for any t vector $n(t)$ can be chosen so that the following four values do not depend on t :

$$k \cdot n(t) = const \,, \qquad e^1(t) \cdot n(t) = const \,, \qquad e^2(t) \cdot n(t) = const \,, \qquad (n(t))^2 = const \,. \tag{7}$$

The first three conditions with fixed t define in the Minkowski space a line $\widetilde{n}$, which is a point of the factor-plane $\widetilde{N}$ constructed in the section 4. As we have pointed out in the section 5, on this line there is exactly one point satisfying the fourth of the equations (7). This is the point where the desired vector $n(t)$ has its end.

Using now the first statement from the section 5, we see that we have constructed a continuous family of transformations from $\mathcal{L}_k$ transforming a given point of the cylinder (6) to any other given point. So, we have proved the

L e m m a. *Transformations of the little group $\mathcal{L}_k$ act on the cylinder* (6) *transitively.*

By the way, we have proved the following

S t a t e m e n t. *A linear transformation of the space $M^{\perp}$, preserving the scalar product there, can be uniquely completed as a linear transformation of M , preserving the scalar product in M .*

Let us suppose now that the representation $T^{\perp}$ is decomposable, i. e. the space $M^{\perp}$ decomposes into a direct sum $M^{\perp} = M' \oplus M''$ of two reducing subspaces M' and M'' . One of these two subspaces, for example M' , necessarily contain some vector that does not belong to $M^{\parallel}$. The end of this vector lies on the corresponding cylinder (6). But then, as we have just shown, the whole cylinder must belong to M' . But the linear shell of the cylinder (6) coincides with $M^{\perp}$ and, therefore, $M' = M^{\perp}$. So, we have proved a

L e m m a. *Every reducing subspace of the representation $T^{\perp}$ either coincides with $M^{\perp}$ or belongs to $M^{\parallel}$.*

From this we have the

T h e o r e m. *The representation $T^{\perp}$ is indecomposable.*

Complex vector representation

9. Complexification. As we have shown in the paper [IV], for investigation of electromagnetic field it is useful to study also the complex vector representation of the little group $\mathcal{L}_k$. In order to get this representation we just should admit that components of vectors under consideration can be complex numbers and suppose that representation of the group $\mathcal{L}_k$ acts there by the same formulas as in the real case. And the group $\mathcal{L}_k$ does not change in any way.

The complexified Minkowski space will be denoted as $M_{\mathbb{C}}$. Generally, later on all spaces and representations will be labeled by symbol of the corresponding field of scalars. If two spaces are denoted the same but have different scalar label, then we imply, that the complex space is the complexification of the real. For example, the real Minkowski space will be denoted as $M_{\mathbb{R}}$. We will also imply that real spaces are subsets of corresponding complex spaces. The representation of the group $\mathcal{L}_k$ that acts in $M_{\mathbb{C}}$ will be denoted as $T_{\mathbb{C}}$.

An arbitrary vector $n \in M_{\mathbb{C}}$ can be represented as a sum of its real and imaginary parts: $n = n^{\mathrm{Re}} + i n^{\mathrm{Im}}$. Here $n^{\mathrm{Re}}, n^{\mathrm{Im}} \in M_{\mathbb{R}}$. So far as transformations of the group $\mathcal{L}_k$ are transformations with real coefficients, we may suppose that a transformation of a complex vector is a simultaneous transformations of its real and imaginary parts.

All reducing subspaces and factor-spaces found in the real case are obviously complexified. But the analogy between the representations $T_{\mathbb{R}}$ and $T_{\mathbb{C}}$ is not full. Reducibility and decomposability of complexified representations must be investigated in addition. For proving of indecomposability of complex representations the following lemma will play an important role

L e m m a. *Let us suppose that we have defined: a vector* $n \in M_{\mathbb{C}}$ *; some two-dimensional subspace* $P^2_{\mathbb{R}}$ *in* $M_{\mathbb{R}}$ *, such that* $n \in P^2_{\mathbb{C}}$ *; and some one-dimensional subspace* $P^1_{\mathbb{R}}$ *in* $P^2_{\mathbb{R}}$ *, such that* $n \notin P^1_{\mathbb{C}}$ *. Then multiplying* n *by an appropriate factor* $\theta \in \mathbb{C}$ *we can make that* $(\theta n)^{\mathrm{Im}} \in P^1_{\mathbb{R}}$ *and* $(\theta n)^{\mathrm{Re}} \notin P^1_{\mathbb{R}}$ *.*

In order to prove this lemma, let us multiply the initial vector n by a number like $e^{i\varphi}$, where the argument φ runs through the set of real numbers. When the argument φ changes, the vectors $n^{\mathrm{Re}}(t)$ and $n^{\mathrm{Im}}(t)$ will move on some ellipsis in the plane $P^2_{\mathbb{R}}$ (If n^{Re} and n^{Im} are parallel, the ellipsis degenerates into the segment). This ellipsis intersects with any one-dimensional subspace $P^1_{\mathbb{R}}$ belonging to $P^2_{\mathbb{R}}$. Now it is obvious that with appropriate φ the imaginary part of the vector will be in $P^1_{\mathbb{R}}$ and the real part will not be there.

10. Decomposability of $T_{\mathbb{C}}^{\perp/\parallel}$. As we have shown in the section 6, in the space $M_{\mathbb{R}}^{\perp/\parallel}$ the little group $\mathcal{L}_k$ acts as the group $SO(2)$. So far as the group $SO(2)$ is Abelian, as it follows from the Schur lemma, the complex representation $T_{\mathbb{C}}^{\perp/\parallel}$ must be reducible. On the other hand, so far as the group $SO(2)$ is compact, the representation $T_{\mathbb{C}}^{\perp/\parallel}$ is equivalent to some unitary representation and therefore it is fully reducible. The corresponding subrepresentations we will denote as $T_{\mathbb{C}}^{(+1)/\parallel}$ and $T_{\mathbb{C}}^{(-1)/\parallel}$.

In order to make this result more concrete, let us introduce in the real space $M_{\mathbb{R}}^{\perp/\parallel}$ an orthonormal basis $\{\tilde{e}^i\}_{i=1,2}$. Then the matrices of the representation $T_{\mathbb{R}}^{\perp/\parallel}$ will take the form:

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

If now in the complex plane $M_{\mathbb{C}}^{\perp/\parallel}$ we use complex “spiral” basis $\{\tilde{e}^{(\lambda)}\}_{\lambda=\pm1}$:

$$\tilde{e}^{(\pm1)} = \frac{\tilde{e}^1 \pm i\,\tilde{e}^2}{\sqrt{2}} ,$$

the matrices of the representation $T_{\mathbb{C}}^{\perp/\parallel}$ become diagonal:

$$\begin{pmatrix} e^{-i\varphi} & 0 \\ 0 & e^{+i\varphi} \end{pmatrix}$$

So, we have proved the

T h e o r e m. *The representation* $T_{\mathbb{C}}^{\perp/\parallel}$ *has exactly two reducing subspaces:* $M_{\mathbb{C}}^{(+1)/\parallel}$ *and* $M_{\mathbb{C}}^{(-1)/\parallel}$ *. The sum of the corresponding subrepresentations is the representation* $T_{\mathbb{C}}^{\perp/\parallel}$ *:*

$$T_{\mathbb{C}}^{\perp/\parallel} = T_{\mathbb{C}}^{(+1)/\parallel} \oplus T_{\mathbb{C}}^{(-1)/\parallel} .$$

For the electromagnetic field (see [IV]) this theorem means that there exist plane waves with helicity $+1$ and -1 — the well-known fact.

Let us notice also that:

a. So far as in the Minkowski space we have not initially introduced any orientation, there is no orientation on the plane $M_{\mathbb{R}}^{\perp/\parallel}$. Therefore we can not say which space is denoted $M_{\mathbb{C}}^{(+1)/\parallel}$, and which $M_{\mathbb{C}}^{(-1)/\parallel}$. In fact, by fixation of these notations we introduce orientation.

b. If we extend the Lorentz group to the *full* Lorentz group by including there space reflections, then the little group also expands. The group $SO(2)$ acting in the plane $M_{\mathbb{R}}^{\perp/\parallel}$ expands to $O(2)$. Under reflections the complex spaces $M_{\mathbb{C}}^{(+1)/\parallel}$ and $M_{\mathbb{C}}^{(-1)/\parallel}$ will be transformed to each other and the complex representation in the space $M_{\mathbb{C}}^{\perp/\parallel}$ will become irreducible.

11. Subrepresentations $T_{\mathbb{C}}^{(+1)}$ and $T_{\mathbb{C}}^{(-1)}$. In accordance with the decomposability of the factor-representation $T_{\mathbb{C}}^{\perp/\parallel}$ shown in the section 10, in the complex Minkowski space $M_{\mathbb{C}}$ we can find two two-dimensional reducing subspaces of the representation $T_{\mathbb{C}}$. These two subspaces we will denote $M_{\mathbb{C}}^{(+1)}$ and $M_{\mathbb{C}}^{(-1)}$. The corresponding one-dimensional factor-spaces $M_{\mathbb{C}}^{(+1)}/M_{\mathbb{C}}^{\parallel} = M_{\mathbb{C}}^{(+1)/\parallel}$ and $M_{\mathbb{C}}^{(-1)}/M_{\mathbb{C}}^{\parallel} = M_{\mathbb{C}}^{(-1)/\parallel}$ were introduced in the section 10.

Now it is clear that in the complex case the series (1) can be thickened in two ways:

$$\{0\} = M_{\mathbb{C}}^{0} \subset M_{\mathbb{C}}^{\parallel} \subset M_{\mathbb{C}}^{(+1)} \subset M_{\mathbb{C}}^{\perp} \subset M_{\mathbb{C}}^{4} = M_{\mathbb{C}} \ , \tag{8}$$

$$\{0\} = M_{\mathbb{C}}^{0} \subset M_{\mathbb{C}}^{\parallel} \subset M_{\mathbb{C}}^{(-1)} \subset M_{\mathbb{C}}^{\perp} \subset M_{\mathbb{C}}^{4} = M_{\mathbb{C}} \ , \tag{9}$$

It will be shown in the section 13, that the complex vector representation does not have other reducing subspaces. So, besides (8) and (9), the representation $T_{\mathbb{C}}$ does not have other composition series.

12. Indecomposability of representation $T_{\mathbb{C}}$. Let us suppose that the representation $T_{\mathbb{C}}$ is decomposable, i. e. the space $M_{\mathbb{C}}$ can be represented as a sum

$$M_{\mathbb{C}} = M_{\mathbb{C}}' \oplus M_{\mathbb{C}}'' \tag{10}$$

of two reducing subspaces $M_{\mathbb{C}}'$ and $M_{\mathbb{C}}''$. Then one of these subspaces, for example $M_{\mathbb{C}}'$, necessarily contains some vector n that does not belong to $M_{\mathbb{C}}^{\perp}$. According to the lemma from the section 9, without loss of generality we can assume that $n^{\mathrm{Im}} \in M_{\mathbb{R}}^{\perp}$ and $n^{\mathrm{Re}} \notin M_{\mathbb{R}}^{\perp}$.

Let us introduce now some real vector e^1 . In the case if the vector n^{Im} does not belong to $M_{\mathbb{R}}^{\parallel}$, e^1 is just another notation for n^{Im} . But if n^{Im} belongs to $M_{\mathbb{R}}^{\parallel}$, vector e^1 is chosen as any vector such that $e^1 \in M_{\mathbb{R}}^{\perp}$ and $e^1 \notin M_{\mathbb{R}}^{\parallel}$.

Consider now the subgroup of the little group $\mathcal{L}_k$ that leaves the vector e^1 unchanged. According to the definition of the vector e^1 , this subgroup in any case leaves unchanged the vector n^{Im} . From the results of the section 8 we get that the elements of this group can be defined by some vector e^2 , which always has its end lying on some cylinder (6), the condition $e^1 \cdot e^2 = const$ is satisfied, and the vectors k , e^1 and e^2 are linearly independent. The end of the vector e^2 runs through some line parallel to k : $e^2(t) = e^2(0) + tk$. The equations (7) for the vector $n^{\mathrm{Re}}(t)$ take the form:

$$k \cdot n^{\mathrm{Re}}(t) = const \ , \qquad e^1 \cdot n^{\mathrm{Re}}(t) = const \ , \qquad e^2(t) \cdot n^{\mathrm{Re}}(t) = const \ , \qquad (n^{\mathrm{Re}}(t))^2 = const \ .$$

The third equation can be written with more details:

$$(e^2(0) + tk) \cdot n^{\mathrm{Re}}(t) = const \ . \tag{11}$$

Obviously, if we suppose that $(n^{\mathrm{Re}}(t) - n^{\mathrm{Re}}(0)) \in M^{\parallel}$, then the equation (11) for $t \neq 0$ can not be satisfied. Therefore, the subspace $M_{\mathbb{C}}'$ must contain some real vector belonging to $M_{\mathbb{R}}^{\perp}$ and not belonging to $M_{\mathbb{R}}^{\parallel}$. But then, according to the second lemma in the section 8, we have $M_{\mathbb{R}}^{\perp} \subset M_{\mathbb{C}}'$ and, therefore, $M_{\mathbb{C}}^{\perp} \subset M_{\mathbb{C}}'$.

Let us come back again to the complex vector $n \in M_{\mathbb{C}}'$, for which $n^{\mathrm{Re}} \notin M_{\mathbb{R}}^{\perp}$ and $n^{\mathrm{Im}} \in M_{\mathbb{R}}^{\perp}$. So far as we have already proved that $M_{\mathbb{C}}^{\perp} \subset M_{\mathbb{C}}'$, we get that in $M_{\mathbb{C}}'$ there is also such a vector which has zero imaginary part

and which has the real part equal to the real part of vector n . In other words, we have proved that $M'_{\mathbb{C}}$ contains a real vector that does not belong to $M^{\perp}_{\mathbb{R}}$. But then, according to the lemma of the section 7, $M_{\mathbb{R}} \subset M'_{\mathbb{C}}$, and, therefore, spaces $M'_{\mathbb{C}}$ and $M_{\mathbb{C}}$ coincide.

So, we have proved the

L e m m a. *Every reducing subspace of the representation $T_{\mathbb{C}}$ either coincides with the whole space $M_{\mathbb{C}}$ or belongs to $M^{\perp}_{\mathbb{C}}$.*

From this we get the

T h e o r e m. *The representation $T_{\mathbb{C}}$ is indecomposable.*

13. Indecomposability of representations $T^{\perp}_{\mathbb{C}}$, $T^{(+1)}_{\mathbb{C}}$ and $T^{(-1)}_{\mathbb{C}}$. Let us prove the following lemma:

L e m m a. *Every subrepresentation of representation $T^{\perp}_{\mathbb{C}}$ contains the subrepresentation $T^{\|}_{\mathbb{C}}$.*

In order to prove this lemma, let us denote the subrepresentation under consideration as $T'_{\mathbb{C}}$. The reducing subspace where it acts we denote $M'_{\mathbb{C}}$.

Consider some non-zero vector n from the subspace $M'_{\mathbb{C}}$. If it lies in $M^{\|}_{\mathbb{C}}$, then the statement of the lemma is satisfied. Suppose now that this vector does not belong to $M^{\|}_{\mathbb{C}}$.

If the vectors k , n^{Re} and n^{Im} are linearly dependent then, according to the lemma from the section 9, we can without loss of generality think that $n^{\mathrm{Im}} \in M^{\|}_{\mathbb{R}}$ and $n^{\mathrm{Re}} \notin M^{\|}_{\mathbb{R}}$. According to the first lemma from the section 8, using transformations of the little group $\mathcal{L}_k$ we can change the vector n^{Re} so that we add to it an arbitrary vector from $M^{\|}_{\mathbb{R}}$. At the same time the vector n^{Im} remains unchanged. Therefore $M^{\|}_{\mathbb{R}} \subset M'_{\mathbb{C}}$ and, therefore, $M^{\|}_{\mathbb{C}} \subset M'_{\mathbb{C}}$.

But if the vectors k , n^{Re} and n^{Im} are linearly dependent, then, according to the statement of the section 8, choosing a proper transformation from the little group $\mathcal{L}_k$ we can add to the vector n^{Re} a vector parallel to k so that the vector n^{Im} remains unchanged. Therefore, again $M^{\|}_{\mathbb{R}} \subset M'_{\mathbb{C}}$ and $M^{\|}_{\mathbb{C}} \subset M'_{\mathbb{C}}$. So, the lemma is proved.

From this lemma we get the two theorems:

T h e o r e m. *The representation $T^{\perp}_{\mathbb{C}}$ is indecomposable.*

T h e o r e m. *The representations $T^{(+1)}_{\mathbb{C}}$ and $T^{(-1)}_{\mathbb{C}}$ are indecomposable.*

Furthermore, from the lemma and the theorem of the section 6 we get the

T h e o r e m. *Besides $M^{\|}_{\mathbb{C}}$, $M^{(+1)}_{\mathbb{C}}$, $M^{(-1)}_{\mathbb{C}}$ (and $M^{\perp}_{\mathbb{C}}$) the representation $T^{\perp}_{\mathbb{C}}$ does not have any other reducing subspaces.*

So, the representation $T_{\mathbb{C}}$ does not have any other composition series, besides (8) and (9).

14. Matrices of representations $T_{\mathbb{R}}$ and $T_{\mathbb{C}}$. Many of the obtained results can be represented by patterns for matrices of the representations $T_{\mathbb{R}}$ and $T_{\mathbb{C}}$. If in the spaces $M_{\mathbb{R}}$ and $M_{\mathbb{C}}$ we choose appropriate bases, then these templates become block-triangular:

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \multicolumn{2}{c}{\boxed{SO(2)}} & \cdot \\ 0 & & & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \boxed{1} & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \boxed{e^{-i\varphi}} & 0 & \cdot \\ 0 & 0 & \boxed{e^{+i\varphi}} & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix}$$

And it is known that on the place of every point we have non-zero element, in general case.

Studying in what subspaces and factor-spaces different blocks of these matrices act I leave for the reader.

References

[1] M. A. Naymark „*Lineynye predstavleniya gruppy Lorentza*“, M.: GIFML (1958).

[2] I. M. Gel'fand, R. A. Minlos, Z. Ya. Shapiro „*Predstavleniya gruppy vrascheniy i gruppy Lorentza*“, M.: GIFML (1958).

[3] F. I. Fyodorov *„Gruppa Lorentza“*, M.: Nauka (1979).

[4] L. Ryder *„Kvantovaya teoriya polya“*, M.: Mir (1987). [L. H. Ryder *“Quantum field theory”*, Cambridge: Cambridge univ. press (1985).]

О квантовании электромагнитного поля. V. Векторное представление малой группы Лоренца для светоподобного импульса.

Д. А. Арбатский*

7 февраля 2008 г.

arXiv:math-ph/0402003v1 4 Feb 2004

Аннотация

С использованием элементарных геометрических методов устанавливается изоморфизм малой группы Лоренца для светоподобного импульса и группы движений евклидовой плоскости. В соответствии с теоремой Жордана-Гёльдера-Нётер производится „приведение“ вещественного и комплексного векторных представлений этой группы. Доказывается неразложимость этих представлений.

1. Предварительные замечания. Книг, в которых излагается теория группы Лоренца $\mathfrak{L}$ и теория представлений этой группы, имеется довольно много. В том числе имеются монографии, специально посвящённые этой теме; например, [1, 2, 3]. Всюду отмечается, что малая группа Лоренца $\mathfrak{L}_k$ для светоподобного импульса[1] k изоморфна группе движений евклидовой плоскости $E(2)$. Доказательство, которое при этом приводится, обычно основывается на аналитическом изучении группы $SL(2, \mathbb{C})$, которая является универсальной накрывающей группы Лоренца.

Такой подход, по-видимому, является оптимальным, когда в дальнейшем ставится задача изучения произвольных (в том числе двузначных) представлений группы $\mathfrak{L}_k$. При этом, однако, понять геометрический смысл изоморфизма $\mathfrak{L}_k$ и $E(2)$ представляется затруднительным[2].

Уточним здесь, что обычно понимается под „геометрическим смыслом“. С точки зрения физических приложений, группа Лоренца наиболее естественно определяется своим векторным представлением[3]. При этом малая группа $\mathfrak{L}_k$ определяется просто как стационарная подгруппа вектора k . Группа $E(2)$, в свою очередь, определяется как группа движений евклидовой плоскости. Имея в виду эти определения групп $\mathfrak{L}_k$ и $E(2)$, с помощью чисто геометрических построений мы отыщем некоторую двумерную плоскость, обладающую естественной евклидовой структурой, на которой группа $\mathfrak{L}_k$ будет действовать как группа движений.

Другой вопрос, которым мы будем здесь заниматься (и который является главной мотивацией для опубликования данной статьи) — это „приведение“ векторного представления группы $\mathfrak{L}_k$, т. е. мы выясним, из каких неприводимых представлений оно состоит. С точки зрения общей теории представлений, этот случай является очень частным и не содержит каких-либо специфических трудностей. Однако, ввиду его большой практической важности, представляется полезным провести его рассмотрение с использованием построений, наиболее отвечающих нашей геометрической интуиции.

Вещественное векторное представление

2. Обозначения и терминология. *Пространством Минковского* M называется четырёхмерное вещественное линейное пространство $\mathbb{R}^4$, в котором задана вещественная симметричная билинейная форма $g(\cdot\,,\cdot)$,

*http://d-a-arbatsky.narod.ru/

[1] Слово „импульс“ употребляется, поскольку имеются в виду приложения к теории безмассовых полей; в частности, электромагнитного. Пока мы занимаемся чисто математическим исследованием, можно считать, что речь идёт о произвольном изотропном векторе k : $k^2 = 0$.

[2] В частности, Райдер [4] по этому поводу заметил, что „физический смысл этого результата не ясен“.

[3] Такое представление иногда называют „фундаментальным“.

имеющая сигнатуру $(+,-,-,-)$. Эта форма называется *скалярным произведением.* Для краткости вместо $g(a,b)$ мы будем писать просто ab или $a \cdot b$.

Рассмотрим теперь группу всех линейных преобразований пространства Минковского M , сохраняющих скалярное произведение. Связная компонента этой группы, содержащая единицу, сама является группой. Эту последнюю группу мы будем называть *группой Лоренца* и обозначать её $\mathfrak{L}$.

На протяжении всей статьи мы будем иметь дело с векторным представлением группы Лоренца, то есть с представлением в самом пространстве Минковского. Это представление будет обозначаться как T .

Малой группой вектора k называется стационарная подгруппа вектора k , т. е. подгруппа группы Лоренца, оставляющая вектор k неизменным. Она будет обозначаться как $\mathfrak{L}_k$.

Вектор k называется *времениподобным*, если $k^2 > 0$; *светоподобным* или *изотропным*, если $k^2 = 0$; и *пространственноподобным*, если $k^2 < 0$.

Рассмотрим также группу всех преобразований евклидовой плоскости, сохраняющих расстояние. Связная компонента этой группы, содержащая единицу, сама является группой. Мы будем её называть *группой движений евклидовой плоскости* и обозначать $E(2)$.

3. Приводящие подпространства. Следуя теореме Жордана-Гёльдера-Нётер, попробуем сразу угадать композиционный ряд представления T , т. е. такой монотонный набор приводящих подпространств представления T , чтобы соответствующие последовательные факторпредставления оказались неприводимыми:

$$\{0\} = M^0 \subset M^{\parallel} \subset M^{\perp} \subset M^4 = M \ . \tag{1}$$

Здесь M^0 — нулевое подпространство в M ; $M^{\parallel}$ — подпространство, содержащее все векторы, параллельные k ; $M^{\perp}$ — подпространство, содержащее все векторы, ортогональные k ; M^4 — другое обозначение пространства Минковского.

Каждое из этих подпространств, очевидно, инвариантно по отношению к действию группы $\mathfrak{L}_k$. Подпредставления в подпространствах $M^{\parallel}$ и $M^{\perp}$ обозначим $T^{\parallel}$ и $T^{\perp}$, соответственно.

Далее, набору (1) соответствует последовательность из трёх последовательных факторпредставлений в факторпространствах $M^{\parallel}/M^0 = M^{\parallel}$, $M^{\perp}/M^{\parallel} = M^{\perp/\parallel}$ и $M^4/M^{\perp} = M^{4/\perp}$. Первое из этих факторпредставлений является подпредставлением. Мы его уже обозначили как $T^{\parallel}$. Второе и третье факторпредставления обозначим $T^{\perp/\parallel}$ и $T^{4/\perp}$, соответственно.

Неприводимость факторпредставлений $T^{\parallel}$ и $T^{4/\perp}$ не вызывает сомнений по причине их одномерности. Что касается факторпредставления $T^{\perp/\parallel}$, то его неприводимость (вещественную) мы установим в пункте 6.

В пунктах 7 и 8 будут доказаны две леммы из которых следует, что кроме подпространств (1), других приводящих подпространств у представления T нет. Тем самым, композиционный ряд (1) является единственным. Поэтому в данном случае утверждение теоремы Жордана-Гёльдера-Нётер о том, что все композиционные ряды имеют одинаковую длину и соответствующие факторпредставления у этих рядов эквивалентны, оказывается тривиальным.

4. Гомоморфизм $\mathfrak{L}_k$ в $E(2)$. Рассмотрим теперь в пространстве Минковского трёхмерную гиперплоскость N , задаваемую уравнением:

$$k \cdot x = const \neq 0 \ . \tag{2}$$

Поскольку группа $\mathfrak{L}_k$ оставляет вектор k неизменным и сохраняет скалярное произведение, гиперплоскость N инвариантна относительно действия группы $\mathfrak{L}_k$.

Введём теперь для векторов из N отношение эквивалентности $\sim$:

$$a \sim b \iff a - b \in M^{\parallel} \ , \tag{3}$$

Иначе говоря, два вектора эквивалентны, если их концы лежат на прямой, параллельной k . Ввиду (1) и (2) каждая такая прямая целиком содержится в гиперплоскости N . Факторизуя N по отношению эквивалентности (3), получаем некоторую двумерную плоскость[4] $\widetilde{N}$. Мы будем обозначать точки из $\widetilde{N}$ и соответствующие им прямые на N одинаковыми символами: $\widetilde{a}$, $\widetilde{c}$ и т. п.

[4]Плоскость $\widetilde{N}$ не является *вложенной* в пространство Минковского.

Плоскость $\widetilde{N}$ обладает естественной евклидовой структурой. В самом деле, возьмём две произвольные точки $\widetilde{a}$ и $\widetilde{c}$ на $\widetilde{N}$. Каждая из них — это класс эквивалентности точек на N. Возьмём по одному произвольному представителю каждого из этих двух классов: a и c, соответственно. Вычислим величину

$$\rho\,(a,c) = \sqrt{(a-c)^2}\ . \tag{4}$$

Эта величина не зависит от выбора представителей a и c. Действительно, заменим, скажем, a на $a+\alpha k$. Учитывая (2), имеем:

$$\rho\,(a+\alpha k,c) = \sqrt{(a-c+\alpha k)^2} = \sqrt{(a-c)^2+2\alpha(ka-kc)+\alpha^2k^2} = \sqrt{(a-c)^2} = \rho\,(a,c)\ .$$

Кроме того, $(a-c)^2$ всегда больше нуля, и функция $\rho\,(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ обладает всеми свойствами евклидовой метрики, поскольку плоскость $\widetilde{N}$ можно отождествить с любой из пространственно-подобных двумерных плоскостей, содержащихся в N.

Теперь заметим, что и отношение эквивалентности (3) и метрика $\rho\,(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ инвариантны относительно действия малой группы $\mathfrak{L}_k$. Таким образом, построено гомоморфное отображение группы $\mathfrak{L}_k$ в группу движений $E(2)$ евклидовой плоскости $\widetilde{N}$.

5. Обратное отображение. В дальнейшем мы будем неоднократно использовать следующие два предложения, верные как в вещественном, так и в комплексном случае.

П р е д л о ж е н и е. *Если линейное преобразование действует на некоторый базис* $\{n^i\}_{i=1..4}$ *так, что оказываются неизменными скалярные произведения элементов базиса (включая квадраты базисных элементов), то это преобразование сохраняет скалярное произведение.*

П р е д л о ж е н и е. *Если линейное преобразование действует на некоторый базис* $\{n^i\}_{i=1..4}$ *так, что оказываются неизменными все величины* $(n^i-n^j)^2$ *и* $(n^i)^2$*, то это преобразование сохраняет скалярное произведение.*

Первое предложение следует из того, что всякий вектор можно разложить по векторам базиса. Второе предложение следует из первого с учётом формулы:

$$(n^i-n^j)^2 = (n^i)^2+(n^j)^2-2n^in^j\ .$$

Зафиксируем теперь произвольное движение плоскости $\widetilde{N}$. Преобразование из малой группы $\mathfrak{L}_k$, которое при построенном в пункте 4 гомоморфизме переходит в данное движение на $\widetilde{N}$, будем называть *искомым.* Покажем, что искомое преобразование из $\mathfrak{L}_k$ существует и единственно. Тем самым будет установлено, что рассматриваемый гомоморфизм на самом деле является изоморфизмом.

Для этого рассмотрим семейство гиперповерхностей, задаваемых уравнениями вида

$$x^2 = const\ . \tag{5}$$

Пересечение любой из них с гиперплоскостью N является параболоидом. Каждый такой параболоид инвариантен относительно искомого преобразования. При этом каждая прямая, представляющая собой точку из $\widetilde{N}$, пересекает такой параболоид ровно в одной точке, и через каждую точку параболоида проходит ровно одна такая прямая. Следовательно, определено действие искомого преобразования на любом из параболоидов.

Возьмём теперь на одном из параболоидов четыре точки, не принадлежащие никакой двумерной плоскости. Четыре вектора $\{n^i\}_{i=1..4}$, концами которых являются эти четыре точки, образуют базис в M. Определённое нами на параболоиде преобразование сохраняет величины $(n^i-n^j)^2$, т. к. каждая из них — это квадрат соответствующего расстояния в $\widetilde{N}$. Величины $(n^i)^2$ также сохраняются, т. к. они постоянны на параболоиде. Продолжим теперь по линейности построенное преобразование векторов базиса на всё пространство M. Как следует из второго предложения, сформулированного в начале этого пункта, получится преобразование, сохраняющее скалярное произведение в M. Кроме того, по построению, данное преобразование сохраняет плоскость (2), а потому оно сохраняет неизменным вектор k. Так как исходное движение плоскости $\widetilde{N}$ предполагалось принадлежащим связной группе $E(2)$, построенное преобразование в M принадлежит связной группе $\mathfrak{L}_k$.

Построенное преобразование является единственным, могущим претендовать на роль искомого. С другой стороны, построенное преобразование из $\mathfrak{L}_k$ при гомоморфизме из пункта 4 переходит в некоторое движение на $\widetilde{N}$. Это движение, по построению, действует на четыре точки[5] $\widetilde{n}^i \in \widetilde{N}$ так же, как и исходное движение

[5] Прямые, содержащие концы векторов базиса $\{n^i\}_{i=1..4}$

в $\widetilde{N}$. Поскольку движение евклидовой плоскости однозначно определяется своим действием даже на две несовпадающие точки, построенное преобразование из $\mathfrak{L}_k$ является искомым. Таким образом, доказана

Т е о р е м а. *Группы $\mathfrak{L}_k$ и $E(2)$ изоморфны.*

6. Факторпредставление $T^{\perp/\parallel}$. Аналогично построенной в пункте 4 факторплоскости $\widetilde{N}$, факторпространство $M^{\perp/\parallel}$ обладает естественной евклидовой структурой[6], она даётся той же формулой (4). Таким образом, малая группа $\mathfrak{L}_k$ действует в $M^{\perp/\parallel}$ как группа вращений евклидовой плоскости вокруг фиксированной точки. Такая группа обозначается как $SO(2)$.

Очевидно, в евклидовой плоскости нет такого направления, которое оставалось бы инвариантным при вращениях. Отсюда вытекает

Т е о р е м а. *Факторпредставление $T^{\perp/\parallel}$ неприводимо (в вещественном смысле).*

7. Неразложимость представления T . Предположим, что представление T разложимо, то есть пространство M представимо в виде прямой суммы $M = M' \oplus M''$ двух нетривиальных приводящих подпространств M' и M'' . Одно из этих подпространств, например M' , обязательно содержит какой-нибудь вектор, не содержащийся в $M^\perp$. При подходящем выборе константы в уравнении (2) конец этого вектора будет лежать в плоскости N . В пункте 5 мы видели, что преобразованиями из $\mathfrak{L}_k$ этот вектор может быть переведён в любой другой вектор, конец которого лежит на том же параболоиде. В том числе он может быть переведён в четыре вектора $\{n^i\}_{i=1..4}$, составляющие базис в M . Следовательно, M' должно совпадать со всем M . Таким образом, доказана

Л е м м а. *Всякое приводящее подпространство представления T либо совпадает со всем пространством M , либо содержится в $M^\perp$.*

Из неё вытекает

Т е о р е м а. *Представление T неразложимо.*

8. Неразложимость представления $T^\perp$. Рассмотрим цилиндр, задаваемый уравнениями:

$$k \cdot x = 0 \ , \qquad x^2 = const \neq 0 \ . \tag{6}$$

Докажем, что $\mathfrak{L}_k$ действует на нём транзитивно, т. е. всякая точка на цилиндре, может быть переведена во всякую другую. Обозначим вектор, конец которого указывает в исходную точку, как $e^1(0)$, а вектор, указывающий в конечную, как $e^1(1)$. Так как цилиндр связен, то эти две точки можно соединить непрерывной кривой $e^1(t)$, $t \in [0;1]$.

Введём также вектор $e^2(t)$, непрерывно зависящий от t . Будем считать, что конец вектора $e^2(t)$ всегда лежит на некотором одном цилиндре вида (6). Кроме того, потребуем, чтобы скалярное произведение $e^1(t) \cdot e^2(t) = const$ не зависело от t . И ещё потребуем, чтобы векторы k , $e^1(t)$ и $e^2(t)$ были линейно независимы при $t = 0$ и, следовательно, линейно независимы при произвольном t .

Вектор $e^2(t)$ определён, конечно, неоднозначно. Его всегда можно заменить на $e^2(t) + \alpha(t)\, k$, где $\alpha(t)$ — произвольная непрерывная функция. Указанную неоднозначность мы фиксировать никак не будем.

Примем теперь три вектора k , $e^1(t)$ и $e^2(t)$ за базис в $M^\perp$. Применяя трёхмерный вариант первого предложения из пункта 5, получаем непрерывное семейство линейных преобразований в $M^\perp$, сохраняющих в $M^\perp$ скалярное произведение.

Покажем теперь, что эти преобразования можно достроить до преобразований из $\mathfrak{L}_k$. Для этого возьмём произвольный вектор $n(0)$, не принадлежащий подпространству $M^\perp$. Векторы k , $e^1(t)$, $e^2(t)$ и $n(0)$ образуют базис в пространстве Минковского M . Покажем, что при произвольном t вектор $n(t)$ можно выбрать так, что следующие четыре величины не будут зависеть от t :

$$k \cdot n(t) = const \ , \qquad e^1(t) \cdot n(t) = const \ , \qquad e^2(t) \cdot n(t) = const \ , \qquad (n(t))^2 = const \ . \tag{7}$$

Первые три условия при фиксированном t выделяют в пространстве Минковского M прямую $\widetilde{n}$, являющуюся точкой факторплоскости $\widetilde{N}$, построенной в пункте 4. Как было указано в пункте 5, на этой прямой имеется

[6] Более того, $M^{\perp/\parallel}$ линейно, и в нём имеется соответствующее скалярное произведение: $\widetilde{a} \cdot \widetilde{c} = ac$.

ровно одна точка, удовлетворяющая четвёртому из уравнений (7). Это и есть точка, в которую указывает искомый вектор $n(t)$.

Применяя теперь первое предложение из пункта 5, видим, что построено непрерывное семейство преобразований из $\mathfrak{L}_k$, переводящих заданную точку цилиндра (6) в любую другую заданную точку. Итак, доказана

Л е м м а. *Преобразования малой группы $\mathfrak{L}_k$ действуют на цилиндре* (6) *транзитивно.*

Попутно нами было доказано следующее

П р е д л о ж е н и е. *Линейное преобразование пространства $M^\perp$, сохраняющее в нём скалярное произведение, может быть единственным образом достроено до линейного преобразования пространства M , сохраняющего скалярное произведение в M .*

Предположим теперь, что представление $T^\perp$ разложимо, т. е. пространство $M^\perp$ распадается в прямую сумму $M^\perp = M' \oplus M''$ двух приводящих подпространств M' и M'' . Одно из этих подпространств, например M' , обязательно содержит какой-нибудь вектор, не содержащийся в $M^\parallel$. Конец этого вектора лежит на соответствующем цилиндре (6). Но тогда, как было только что показано, и весь цилиндр должен содержаться в M' . Но линейная оболочка цилиндра (6) совпадает с $M^\perp$, и, следовательно, $M' = M^\perp$. Таким образом, доказана

Л е м м а. *Всякое приводящее подпространство представления $T^\perp$ либо совпадает с $M^\perp$, либо содержится в $M^\parallel$.*

Из неё вытекает

Т е о р е м а. *Представление $T^\perp$ неразложимо.*

Комплексное векторное представление

9. Комплексификация. Как было показано в статье [IV], при исследовании электромагнитного поля полезно изучить также комплексное векторное представление малой группы $\mathfrak{L}_k$. Чтобы получить это представление, нужно просто допустить, что компоненты рассматриваемых векторов могут быть комплексными числами, и считать, что представление группы $\mathfrak{L}_k$ действует в нём по тем же формулам, что и в вещественном случае. Сама группа $\mathfrak{L}_k$ при этом никак не изменяется.

Комплексифицированное пространство Минковского будет обозначаться как $M_{\mathbb{C}}$. Вообще, далее все пространства и представления будут помечаться значком соответствующего им поля скаляров. Если два пространства обозначаются одинаково и различаются только указанным значком, то предполагается, что комплексное пространство является комплексификацией вещественного. Например, вещественное пространство Минковского, будет обозначаться как $M_{\mathbb{R}}$. Мы будем также полагать, что вещественные пространства являются подмножествами соответствующих комплексных. Представление группы $\mathfrak{L}_k$, действующее в $M_{\mathbb{C}}$, обозначим $T_{\mathbb{C}}$.

Произвольный вектор $n \in M_{\mathbb{C}}$ может быть представлен в виде суммы своей вещественной и мнимой частей: $n = n^{\mathrm{Re}} + i n^{\mathrm{Im}}$. Здесь $n^{\mathrm{Re}}, n^{\mathrm{Im}} \in M_{\mathbb{R}}$. Поскольку преобразования группы $\mathfrak{L}_k$ являются преобразованиями с вещественными коэффициентами, можно считать, что преобразованию комплексного вектора соответствует одновременное преобразование его вещественной и мнимой частей.

Все найденные в вещественном случае приводящие подпространства и факторпространства, очевидно, комплексифицируются Полной аналогии, однако, между представлениями $T_{\mathbb{R}}$ и $T_{\mathbb{C}}$ нет. Приводимость и разложимость комплексифицированных представлений нужно исследовать дополнительно. При доказательстве неразложимости комплексных представлений важную роль будет играть следующая

Л е м м а. *Пусть заданы: вектор $n \in M_{\mathbb{C}}$; некоторое двумерное подпространство $P^2_{\mathbb{R}}$ в $M_{\mathbb{R}}$, такое, что $n \in P^2_{\mathbb{C}}$; и некоторое одномерное подпространство $P^1_{\mathbb{R}}$ в $P^2_{\mathbb{R}}$, такое, что $n \notin P^1_{\mathbb{C}}$. Тогда, умножая n на подходящий множитель $\theta \in \mathbb{C}$, можно добиться, чтобы $(\theta n)^{\mathrm{Im}} \in P^1_{\mathbb{R}}$ и $(\theta n)^{\mathrm{Re}} \notin P^1_{\mathbb{R}}$.*

Чтобы доказать эту лемму, умножим исходный комплексный вектор n на число вида $e^{i\varphi}$, где переменная φ пробегает множество вещественных чисел. При изменении переменной φ векторы $n^{\mathrm{Re}}(t)$ и $n^{\mathrm{Im}}(t)$ будут двигаться по некоторому эллипсу в плоскости $P^2_{\mathbb{R}}$ (если n^{Re} и n^{Im} параллельны, эллипс вырождается в отрезок). Этот эллипс пересекается с любым одномерным подпространством $P^1_{\mathbb{R}}$, содержащимся в $P^2_{\mathbb{R}}$. Отсюда очевидно, что при подходящем φ мнимая часть вектора окажется в $P^1_{\mathbb{R}}$, а вещественная там содержаться не будет.

10. Разложимость $T^{\perp/\parallel}_{\mathbb{C}}$. Как было показано в пункте 6, в пространстве $M^{\perp/\parallel}_{\mathbb{R}}$ малая группа $\mathfrak{L}_k$ действует, как группа $SO(2)$. Поскольку группа $SO(2)$ абелева, то, как следует из леммы Шура, комплексное

представление $T_{\mathbb{C}}^{\perp/\|}$ обязано быть приводимым. Кроме того, поскольку группа $SO(2)$ компактна, представление $T_{\mathbb{C}}^{\perp/\|}$ эквивалентно некоторому унитарному и, следовательно, вполне приводимо. Соответствующие подпредставления обозначим $T_{\mathbb{C}}^{(+1)/\|}$ и $T_{\mathbb{C}}^{(-1)/\|}$.

Чтобы сделать этот результат более конкретным, введём в вещественном пространстве $M_{\mathbb{R}}^{\perp/\|}$ ортонормированный базис $\{\tilde{e}^i\}_{i=1,2}$. При этом матрицы представления $T_{\mathbb{R}}^{\perp/\|}$ примут вид:

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

Если теперь в комплексной плоскости $M_{\mathbb{C}}^{\perp/\|}$ перейти к комплексному „спиральному“ базису $\{\tilde{e}^{(\lambda)}\}_{\lambda=\pm 1}$:

$$\tilde{e}^{(\pm 1)} = \frac{\tilde{e}^1 \pm i\,\tilde{e}^2}{\sqrt{2}} ,$$

то матрицы представления $T_{\mathbb{C}}^{\perp/\|}$ окажутся диагональными:

$$\begin{pmatrix} e^{-i\varphi} & 0 \\ 0 & e^{+i\varphi} \end{pmatrix}$$

Таким образом, доказана

Т е о р е м а. *Представление* $T_{\mathbb{C}}^{\perp/\|}$ *имеет ровно два приводящих подпространства:* $M_{\mathbb{C}}^{(+1)/\|}$ *и* $M_{\mathbb{C}}^{(-1)/\|}$. *Соответствующие им подпредставления дают в сумме представление* $T_{\mathbb{C}}^{\perp/\|}$ *:*

$$T_{\mathbb{C}}^{\perp/\|} = T_{\mathbb{C}}^{(+1)/\|} \oplus T_{\mathbb{C}}^{(-1)/\|} .$$

В применении к электромагнитному полю (см. [IV]), приведённая теорема означает существование плоских монохроматических волн со спиральностями $+1$ и -1 — факт общеизвестный.

Заметим ещё вот что:

а. Поскольку в пространстве Минковского изначально не вводилось никакой ориентации, на плоскости $M_{\mathbb{R}}^{\perp/\|}$ её тоже нет. Поэтому невозможно сказать, какое из двух пространств обозначается $M_{\mathbb{C}}^{(+1)/\|}$, а какое $M_{\mathbb{C}}^{(-1)/\|}$. Фиксацией этих обозначений фактически вводится ориентация.

б. Если группу Лоренца расширить до *полной* группы Лоренца, включив туда пространственные отражения, то малая группа тоже расширится. При этом группа $SO(2)$, действующая в плоскости $M_{\mathbb{R}}^{\perp/\|}$ расширится до $O(2)$. При отражениях комплексные пространства $M_{\mathbb{C}}^{(+1)/\|}$ и $M_{\mathbb{C}}^{(-1)/\|}$ будут переходить друг в друга, и комплексное представление в пространстве $M_{\mathbb{C}}^{\perp/\|}$ станет уже неприводимым.

11. Подпредставления $T_{\mathbb{C}}^{(+1)}$ и $T_{\mathbb{C}}^{(-1)}$. В соответствии с установленной в пункте 10 разложимостью факторпредставления $T_{\mathbb{C}}^{\perp/\|}$, в комплексном пространстве Минковского $M_{\mathbb{C}}$ можно выделить два двумерных приводящих подпространства представления $T_{\mathbb{C}}$. Эти два подпространства мы обозначим $M_{\mathbb{C}}^{(+1)}$ и $M_{\mathbb{C}}^{(-1)}$. Соответствующие одномерные факторпространства $M_{\mathbb{C}}^{(+1)}/M_{\mathbb{C}}^{\|} = M_{\mathbb{C}}^{(+1)/\|}$ и $M_{\mathbb{C}}^{(-1)}/M_{\mathbb{C}}^{\|} = M_{\mathbb{C}}^{(-1)/\|}$ были введены в пункте 10.

Теперь ясно, что в комплексном случае ряд (1) допускает уплотнение двумя способами:

$$\{0\} = M_{\mathbb{C}}^0 \subset M_{\mathbb{C}}^{\|} \subset M_{\mathbb{C}}^{(+1)} \subset M_{\mathbb{C}}^{\perp} \subset M_{\mathbb{C}}^4 = M_{\mathbb{C}} , \tag{8}$$

$$\{0\} = M_{\mathbb{C}}^0 \subset M_{\mathbb{C}}^{\|} \subset M_{\mathbb{C}}^{(-1)} \subset M_{\mathbb{C}}^{\perp} \subset M_{\mathbb{C}}^4 = M_{\mathbb{C}} , \tag{9}$$

В пункте 13 будет показано, что других приводящих подпространств у комплексного векторного представления нет. Таким образом, кроме (8) и (9), других композиционных рядов у представления $T_{\mathbb{C}}$ нет.

12. Неразложимость представления $T_{\mathbb{C}}$. Предположим, что представление $T_{\mathbb{C}}$ разложимо, т. е. пространство $M_{\mathbb{C}}$ представляется в виде суммы

$$M_{\mathbb{C}} = M'_{\mathbb{C}} \oplus M''_{\mathbb{C}} \tag{10}$$

двух приводящих подпространств $M'_{\mathbb{C}}$ и $M''_{\mathbb{C}}$. Тогда одно из этих подпространств, например $M'_{\mathbb{C}}$, обязательно содержит некоторый вектор n , не содержащийся в $M^{\perp}_{\mathbb{C}}$. Согласно лемме из пункта 9, можно без ущерба для общности считать, что $n^{\mathrm{Im}} \in M^{\perp}_{\mathbb{R}}$ и $n^{\mathrm{Re}} \notin M^{\perp}_{\mathbb{R}}$.

Введём теперь некоторый вещественный вектор e^1 . В случае если вектор n^{Im} не содержится в $M^{\parallel}_{\mathbb{R}}$, e^1 будет просто другим обозначением для n^{Im} . Если же n^{Im} содержится в $M^{\parallel}_{\mathbb{R}}$, то за e^1 примем произвольный вектор, такой, что $e^1 \in M^{\perp}_{\mathbb{R}}$ и $e^1 \notin M^{\parallel}_{\mathbb{R}}$.

Рассмотрим теперь подгруппу малой группы $\mathfrak{L}_k$, оставляющую вектор e^1 неизменным. Эта подгруппа, согласно определению вектора e^1 , в любом случае оставляет неизменным вектор n^{Im} . Из результатов пункта 8 следует, что элементы этой группы могут задаваться некоторым вектором e^2 , конец которого всегда лежит на некотором цилиндре (6), выполняется условие $e^1 \cdot e^2 = const$, и векторы k , e^1 и e^2 линейно независимы. Конец вектора e^2 при этом пробегает некоторую прямую, параллельную k : $e^2(t) = e^2(0) + tk$. Уравнения (7) для вектора $n^{\mathrm{Re}}(t)$ принимают вид:

$$k \cdot n^{\mathrm{Re}}(t) = const \ , \qquad e^1 \cdot n^{\mathrm{Re}}(t) = const \ , \qquad e^2(t) \cdot n^{\mathrm{Re}}(t) = const \ , \qquad (n^{\mathrm{Re}}(t))^2 = const \ .$$

Третье уравнение можно расписать подробнее:

$$(e^2(0) + tk) \cdot n^{\mathrm{Re}}(t) = const \ . \tag{11}$$

Очевидно, если предположить, что $(n^{\mathrm{Re}}(t) - n^{\mathrm{Re}}(0)) \in M^{\parallel}$, то уравнению (11) при $t \neq 0$ удовлетворить невозможно. Следовательно, подпространство $M'_{\mathbb{C}}$ должно содержать и некоторый вещественный вектор, содержащийся в $M^{\perp}_{\mathbb{R}}$ и не содержащийся в $M^{\parallel}_{\mathbb{R}}$. Но тогда, согласно второй лемме пункта 8, должно быть $M^{\perp}_{\mathbb{R}} \subset M'_{\mathbb{C}}$, и, следовательно, $M^{\perp}_{\mathbb{C}} \subset M'_{\mathbb{C}}$.

Вернёмся теперь снова к комплексному вектору $n \in M'_{\mathbb{C}}$, у которого $n^{\mathrm{Re}} \notin M^{\perp}_{\mathbb{R}}$ и $n^{\mathrm{Im}} \in M^{\perp}_{\mathbb{R}}$. Поскольку мы уже доказали, что $M^{\perp}_{\mathbb{C}} \subset M'_{\mathbb{C}}$, то отсюда следует, что в $M'_{\mathbb{C}}$ содержится и такой вектор, мнимая часть которого равна нулю, а вещественная совпадает с вещественной частью вектора n . Иначе говоря, доказано, что $M'_{\mathbb{C}}$ содержит вещественный вектор, не содержащийся в $M^{\perp}_{\mathbb{R}}$. Но тогда, как следует из леммы пункта 7, $M_{\mathbb{R}} \subset M'_{\mathbb{C}}$, и, следовательно, пространства $M'_{\mathbb{C}}$ и $M_{\mathbb{C}}$ совпадают.

Таким образом, доказана

Л е м м а. *Всякое приводящее подпространство представления $T_{\mathbb{C}}$ либо совпадает со всем пространством $M_{\mathbb{C}}$, либо содержится в $M^{\perp}_{\mathbb{C}}$.*

Из неё вытекает

Т е о р е м а. *Представление $T_{\mathbb{C}}$ неразложимо.*

13. Неразложимость представлений $T^{\perp}_{\mathbb{C}}$, $T^{(+1)}_{\mathbb{C}}$ и $T^{(-1)}_{\mathbb{C}}$. Докажем сначала следующую лемму:

Л е м м а. *Всякое подпредставление представления $T^{\perp}_{\mathbb{C}}$ содержит подпредставление $T^{\parallel}_{\mathbb{C}}$.*

Чтобы доказать эту лемму, обозначим рассматриваемое подпредставление как $T'_{\mathbb{C}}$. Приводящее подпространство, в котором оно действует, обозначим $M'_{\mathbb{C}}$.

Рассмотрим какой-нибудь ненулевой вектор n из подпространства $M'_{\mathbb{C}}$. Если он лежит в $M^{\parallel}_{\mathbb{C}}$, то условие леммы выполнено. Предположим теперь, что этот вектор не содержится в $M^{\parallel}_{\mathbb{C}}$.

Если векторы k , n^{Re} и n^{Im} линейно зависимы, то, согласно лемме из пункта 9, можно без ущерба для общности считать, что $n^{\mathrm{Im}} \in M^{\parallel}_{\mathbb{R}}$ и $n^{\mathrm{Re}} \notin M^{\parallel}_{\mathbb{R}}$. Далее, согласно первой лемме из пункта 8, с помощью преобразований малой группы $\mathfrak{L}_k$ можно изменить вектор n^{Re} так, что к нему добавится произвольный вектор из $M^{\parallel}_{\mathbb{R}}$. Вектор n^{Im} при этом останется неизменным. Следовательно, $M^{\parallel}_{\mathbb{R}} \subset M'_{\mathbb{C}}$, и, следовательно, $M^{\parallel}_{\mathbb{C}} \subset M'_{\mathbb{C}}$.

Если же векторы k , n^{Re} и n^{Im} линейно независимы, то, как следует из предложения пункта 8, выбирая подходящим образом преобразование малой группы $\mathfrak{L}_k$, можно добавить к вектору n^{Re} вектор, параллельный k , и оставить при этом неизменным вектор n^{Im} . Следовательно, опять $M^{\parallel}_{\mathbb{R}} \subset M'_{\mathbb{C}}$, и $M^{\parallel}_{\mathbb{C}} \subset M'_{\mathbb{C}}$. Таким образом, лемма доказана.

Из доказанной леммы вытекают две теоремы:

Т е о р е м а. *Представление* $T_{\mathbb{C}}^{\perp}$ *неразложимо.*

Т е о р е м а. *Представления* $T_{\mathbb{C}}^{(+1)}$ *и* $T_{\mathbb{C}}^{(-1)}$ *неразложимы.*

Кроме того, из доказанной леммы и теоремы пункта 6 следует

Т е о р е м а. *У представления* $T_{\mathbb{C}}^{\perp}$ *кроме подпространств* $M_{\mathbb{C}}^{\parallel}$, $M_{\mathbb{C}}^{(+1)}$, $M_{\mathbb{C}}^{(-1)}$ *и самого* $M_{\mathbb{C}}^{\perp}$ *других приводящих подпространств нет.*

Таким образом, у представления $T_{\mathbb{C}}$, кроме (8) и (9), других композиционных рядов нет.

14. Матрицы представлений $T_{\mathbb{R}}$ и $T_{\mathbb{C}}$. Многие из полученных результатов можно наглядно изобразить с помощью шаблонов для матриц представлений $T_{\mathbb{R}}$ и $T_{\mathbb{C}}$. Если в пространствах $M_{\mathbb{R}}$ и $M_{\mathbb{C}}$ выбрать подходящие базисы, то эти шаблоны примут блочно-треугольный вид:

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{$SO(2)$}} & \cdot \\ 0 & & & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \boxed{1} & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \boxed{e^{-i\varphi}} & 0 & \cdot \\ 0 & 0 & \boxed{e^{+i\varphi}} & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix}$$

При этом известно, что на месте каждой точки стоит, вообще говоря, не ноль.

Выяснение того, в каких подпространствах и факторпространствах действуют различные блоки этих матриц, оставляется читателю.

Список литературы

[1] М. А. Наймарк *„Линейные представления группы Лоренца“*, М.: ГИФМЛ (1958).

[2] И. М. Гельфанд, Р. А. Минлос, З. Я. Шапиро *„Представления группы вращений и группы Лоренца“*, М.: ГИФМЛ (1958).

[3] Ф. И. Фёдоров *„Группа Лоренца“*, М.: Наука (1979).

[4] Л. Райдер *„Квантовая теория поля“*, М.: Мир (1987). [L. H. Ryder *“Quantum field theory”*, Cambridge: Cambridge univ. press (1985).]

On quantization of electromagnetic field.
VI. Quantization.

D. A. Arbatsky*

February 7, 2008

arXiv:math-ph/0402003v1 4 Feb 2004

Abstract

Here we describe a general method of quantization of linear fields. We introduce a conception of quantization invariant with respect to action of some group. A space of quantum states of relativistic fields is constructed in apparently relativistic-invariant way. A connection with quantization of the field oscillator is established. We substantiate the necessity of using an indefinite scalar product for electromagnetic field. We discuss additional condition for "physically allowed" states of electromagnetic field. We discuss properties of the space of states of electromagnetic field from the point of view of functional analysis. We consider the question about origin of anti-unitary transformations in quantum field theory.

1. Other approaches to quantization. Before we start description of construction of a quantized field, let us give here a brief comparison of our construction with other approaches to description of quantized fields.

- **Method of formal manipulations.** This method was used even in the earliest papers on quantum field theory. Its essence is that we calculate Poisson brackets for classical values and accept that for corresponding quantum values commutators can be calculated by the formula:

$$[\,\hat{a}\,,\,\hat{b}\,] = i\,\{\,a\,,\,b\,\}^{\widehat{}}\,. \tag{1}$$

  Of course, this formula can not be true for all values. Nevertheless, if we use it cautiously enough, we can ascertain many properties of fields, even without clarifying what they are. In fact, this approach turned out to be the most effective from the point of view of practical applications.

  With regards to how Poisson brackets were calculated, it was performed in such a way that it was very difficult to see relativistic invariance even in the classical theory. Later Peierls [1] have suggested an alternative method of obtaining commutation relations, which was apparently relativistic-invariant. The corresponding classical bracket used in the expression (1), was even named "the Peierls bracket". A quite complicated "physical" grounding of the relations (1), used for quantization in the Peierls method, can be found in [2].

  The approach described is most close to ours.

  About classical description of relativistic fields we can say that invariant Hamiltonian formalism allows to define the Poisson bracket in apparently relativistic-invariant way. In this approach the notion of the Poisson bracket changes in such a way that the Peierls bracket turns out to be its very particular case. Methods of practical calculations of Poisson brackets were described by me in the paper [I].

  With regards to quantization of fields, in this paper in will be performed *constructively*: on the base of the developed in [I] invariant Hamiltonian formalism, using usual algebraic methods, we will construct in this paper quantum fields evidently.

- **Method of box.** This method was also very popular in the field theory from its birth. The essence of it is that we consider field not in the infinite space, but in a large box with periodical boundary conditions. So, the description of the field becomes similar to the description of infinite number of oscillators.

  The introduction of a box breaks the relativistic invariance in essence, and this reason is sufficient to not consider this method in detail.

*http://d-a-arbatsky.narod.ru/

Nevertheless, as a result of using this method a useful notion of the field oscillator appeared. In this connection we should notice that in our method we have an analogous notion (introduced in the paper [IV]). We introduce it in a somewhat more abstract way with the use of the notion of an induced symplectic representation. Only by this way it is possible to ascertain the correct group-theory nature of the field oscillator and to connect invariant quantizations of field with invariant quantizations of oscillator.

- **Fock construction and Wigner-Mackey theory.** In the paper [3] Fock suggested that the space of states of a quantum field is a symmetrized tensor exponent of one-particle subspace. Later Wigner and Mackey developed a method of searching for all possible one-particle subspaces, based on the theory of induced unitary representations of Poincare group (see, for example, a review [5]). A quite detailed account of this approach is given in the book [7].

  The shortcomings of this approach are the following. First, operators of creation and destruction of quanta are introduced with quite complicated formulas from the very beginning. Second, even after introducing of these operators quite complicated reasoning is necessary for construction of local operators of *field*. Third, in this approach we can not consider fields with indefinite scalar product at all.

  In our approach the initial object is not a one-particle quantum space, but it is a classical field described by the language of the invariant Hamiltonian formalism. So, the second shortcoming disappears, because field operators are constructed during quantization.

  Operators of creation and destruction of quanta we can also introduce. And formulas for them are just the consequence of our algebraic construction of quantum field, and they are not postulated from the beginning.

  With regards to quantum fields with indefinite scalar product, in our approach they appear as naturally as fields with positive-definite scalar product. Our scheme is really more general, and it can be seen even with the example of massive scalar field. Due to this generality, the scheme naturally includes electromagnetic field as a particular case.

  Let us notice also that in our approach there is also an analog of Wigner-Mackey theory. This is the theory of symplectic representations of Poincare group [IV]. The theory of induced symplectic representations is richer than the theory of induced unitary representations.

- **Approach connected with Stone-von Neumann theorem.** In quantum mechanics when a quantum oscillator is studied the Stone-von Neumann theorem turns out to be useful; it says that canonical commutation relations for coordinates and momenta uniquely define corresponding irreducible unitary representation. Of course, people tried to bring this approach to quantum field theory.

  But the Stone-von Neumann theorem can not be directly changed for the case of quantization of infinite dimensional systems (see, for example, [8]). Great researches were made to overcome this difficulty. Despite of their undoubted importance, I still think that they turned out to be too far from practical applications.

  It should be noticed here also that if we do not require positive-definiteness of scalar product in the space of states, the uniqueness of quantization is lost even in the case of one-dimensional harmonic oscillator. Therefore, our approach differs from this essentially: we refuse to require positive-definiteness of scalar product, but instead we introduce the conception of invariant quantization.

  Let us mention here the following fact. When the Stone-von Neumann theorem is formulated, it is necessary to write commutation relations in the form of Weyl relations. But in our approach we use commutation relations just for unbounded operators. And the construction of quantization rigorously define in what sense they must be understood.

- **Geometric quantization.** The method of geometric quantization is that using geometry of the classical phase space we construct the space of quantum states as a some set of functions on classical phase space (see, for example, [9]).

  From the point of view of the invariant Hamiltonian formalism it is natural to apply this scheme to invariant phase space Z . But let us notice that substantial difficulties are seen immediately for this approach. First, it is not simple at all to make this approach mathematically rigorous for systems with infinite number of degrees of freedom. Second, the connection with Fock construction in this case is given by quite non-evident formulas. For these reasons this approach turns out to be not very convenient for practical applications. Third, it is not clear how we can describe by this approach the case of quantization with indefinite scalar product: even in the case of one-dimensional harmonic oscillator great difficulties arise with definition of indefinite scalar product.

- **Method of path integral.** This method became very popular now because it is supposed to be apparently relativistic-invariant. In fact, people work with path integral as with a symbolic form of writing of some expressions.

On the other hand, it is possible to consider path integral as rigorously defined mathematical object (see, for example, [10]). But such an approach meets so substantial difficulties that we can not talk about any "apparent" relativistic invariance at all.

2. Quantization. Let us describe now, how having classical field we construct quantum field.

1. Consider the set of (complex) functions that are constant on the whole space Z. Let us denote this set as $\mathcal{C}$. Consider also the direct sum $\mathcal{C} \oplus Z^*_{\mathbb{C}}$. The Poisson bracket turns this sum into a complex Lie algebra.

2. Disengaging now from the algebraic structure of the set $\mathcal{C} \oplus Z^*_{\mathbb{C}}$ and considering all its elements as completely independent let us call this set an *alphabet* $\mathcal{A}$ and its elements *letters*. Let us make an agreement that an element of $\mathcal{C} \oplus Z^*_{\mathbb{C}}$ considered as a letter of the alphabet $\mathcal{A}$ will be written additionally with a "hat" on top or on side, for example: $\hat{a} = a\widehat{\ }$.

3. Furthermore, we can introduce a formal product of elements of the alphabet. Namely, let us suppose that if we multiply a (finite) set of letters we get a *word* consisting of these letters (the order of letters is important here):
$$\hat{a}_1 \cdot \hat{a}_2 \cdot \ldots \cdot \hat{a}_k = \hat{a}_1 \hat{a}_2 \ldots \hat{a}_k \ , \qquad \hat{a}_1, \hat{a}_2, \ldots, \hat{a}_k \in \mathcal{A} \ .$$
Words we will also denote by symbols with the hat, for example: $\hat{w} = w\widehat{\ }$. Let us denote the set of all possible words by the symbol $\mathcal{W}$; it is convenient to include in this set the word of zero length that we can denote as $()\widehat{\ }$. It is natural to accept that the operation of multiplication works on the set of words $\mathcal{W}$ also, and it "joins" words. So, $\mathcal{A}$ is a *system of free generators*, and $\mathcal{W}$ is a *free semi-group with neutral element* (the role of neutral element is played by the special element $()\widehat{\ }$).

4. Similarly, let us define the formal sum of (finite) set of words multiplied by arbitrary complex factors. Namely, let us call a *phrase* a formal expression like:
$$\lambda_1 \hat{w}_1 + \lambda_2 \hat{w}_2 + \ldots + \lambda_m \hat{w}_m \ , \qquad \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{C} \ , \quad \hat{w}_1, \hat{w}_2, \ldots, \hat{w}_m \in \mathcal{W} \ .$$
Let us also suppose two phrases to be equivalent, if for every word they have the same sum of factors for this word. The set of all such equivalence classes we will denote with the symbol $\mathcal{P}$.

   On the set of phrases $\mathcal{P}$ we can now naturally introduce operations of addition and multiplication by a scalar. Namely, the sum of phrases is the phrase that arise if we join initial phrases by the symbol " $+$ ". Multiplication of a phrase by a number is defined as multiplication of all factors by this number. So, $\mathcal{P}$ gets natural structure of complex linear space ($\mathcal{P}$ is a *free* $\mathbb{C}$ *-module generated by* $\mathcal{W}$).

   On the set of phrases $\mathcal{P}$ we can also naturally introduce the operation of multiplication of two elements. Namely, the product of two phrases, each of which contains one word, we define by equality:
$$(\lambda_1 \hat{w}_1) \cdot (\lambda_2 \hat{w}_2) = (\lambda_1 \lambda_2)\, (\hat{w}_1 \hat{w}_2) \ , \qquad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C} \ , \quad \hat{w}_1, \hat{w}_2 \in \mathcal{W} \ .$$
And we spread this definition to arbitrary phrases by the requirement of distributivity:
$$\hat{p}_1 \cdot (\hat{p}_2 + \hat{p}_3) = \hat{p}_1 \hat{p}_2 + \hat{p}_1 \hat{p}_3 \ , \qquad (\hat{p}_1 + \hat{p}_2) \cdot \hat{p}_3 = \hat{p}_1 \hat{p}_3 + \hat{p}_2 \hat{p}_3 \ , \qquad \hat{p}_1, \hat{p}_2, \hat{p}_3 \in \mathcal{P} \ .$$

5. So, the set of phrases $\mathcal{P}$ becomes an (associative) algebra ($\mathcal{P}$ is a *semi-group algebra of the semi-group* $\mathcal{W}$ or a *free algebra over semi-group* $\mathcal{W}$).

6. Up to now when we constructed the algebra $\mathcal{P}$ the alphabet $\mathcal{A}$ was considered as a completely arbitrary set. Now, using structure of Lie algebra in $\mathcal{C} \oplus Z^*_{\mathbb{C}}$ and the correspondence between the subspace $\mathcal{C}$ and the field of scalars $\mathbb{C}$ we can additionally bring to the algebra $\mathcal{P}$ some *defining relations*. It is performed by factorization of the algebra $\mathcal{P}$ with respect to the appropriate ideal.

   Namely, consider all phrases of the following types:
$$(\lambda\, a)\widehat{\ } - \lambda\, \hat{a} \ ,$$
$$(a + b)\widehat{\ } - (\hat{a} + \hat{b}) \ ,$$
$$\{\, a \, , \, b \,\}\widehat{\ } + i\, (\hat{a}\, \hat{b} - \hat{b}\, \hat{a}) \ ,$$
$$\hat{1} - ()\widehat{\ } \ .$$
Here $\lambda \in \mathbb{C}$, $a, b \in \mathcal{C} \oplus Z^*_{\mathbb{C}}$, $\hat{a}, \hat{b} \in \mathcal{A}$. 1 — is a notation for the function that is equal to 1 on the whole invariant phase space Z, i. e. $1 \in \mathcal{C} \oplus Z^*_{\mathbb{C}}$; $\hat{1}$ — the element of the alphabet that corresponds to it, $\hat{1} \in \mathcal{A}$.

Let us span now on these phrases the two-sided ideal, i. e. we join to them the phrases that can be made from the given by using finite number of operations of multiplication by a factor, addition, and multiplication (from the left and the right) by arbitrary phrases. Factorizing the algebra $\mathcal{P}$ with respect to the obtained ideal we get an algebra that we will call an *algebra of operators* and will denote as $\mathcal{O}$. The elements of this algebra are called *operators* and are denoted as phrases corresponding to them.

The performed factorization leads to the result that in the algebra of operators we have the following defining relations:

$$(\lambda\, a)\widehat{\ } = \lambda\, \hat{a}\ ,$$

$$(a + b)\widehat{\ } = \hat{a} + \hat{b}\ ,$$

$$\{\, a\,,\, b\,\}\widehat{\ } = -\, i\, [\, \hat{a}\,,\, \hat{b}\,]\ ,$$

$$\hat{1} = ()\widehat{\ }\ .$$

In the third relation we have used the standard notation for *commutator* of two operators: $[\, \hat{a}\,,\, \hat{b}\,] = \hat{a}\,\hat{b} - \hat{b}\,\hat{a}$.

The fourth relation, in particular, allows us to escape using the cumbersome notation $()\widehat{\ }$, when we talk about operator and to write always $\hat{1}$.

7. Let us introduce now the operation of *conjugation*. This operation will be always denoted by the symbol * , without distinction of an object that it is applied to.

   Under conjugation of a complex number we will imply the usual complex conjugation.

   Elements of the space $\mathcal{C} \oplus Z^*_{\mathbb{C}}$ are functions on Z . Under conjugation applied to such a function we will imply a transition to the function with complex-conjugate values. Obviously, in the result we also get an element of the space $\mathcal{C} \oplus Z^*_{\mathbb{C}}$. Furthermore, so far as the Poisson bracket in $\mathcal{C} \oplus Z^*_{\mathbb{C}}$ is a complexified real Poisson bracket, we have the equality:

$$\{\, a^*\,,\, b^*\,\} = \{\, a\,,\, b\,\}^*\ . \tag{2}$$

   The definition of conjugation can be naturally spread to the elements of the alphabet $\mathcal{A}$:

$$(\hat{a})^* = (a^*)\widehat{\ }\ .$$

   To words and to phrases the operation of conjugation is spread by the rules:

$$(\hat{a}\,\hat{b})^* = \hat{b}^*\,\hat{a}^*\ , \qquad (\lambda\,\hat{a})^* = \lambda^*\,\hat{a}^*\ , \qquad (\hat{a} + \hat{b})^* = \hat{a}^* + \hat{b}^*\ .$$

   Here $\hat{a}$ and $\hat{b}$ can be letters, words, and phrases; λ is a complex number.

   Obviously, the operation of conjugation is correctly spread from phrases to operators.

8. Consider now the space $Z^*_{\mathbb{C}}$. Let us split it into a direct sum of two subspaces:

$$Z^*_{\mathbb{C}} = Cr \oplus De\ .$$

   Let us require Cr and De , first, to come to each other under conjugation:

$$Cr^* = De\ . \tag{3}$$

   Second, let us require that the Poisson bracket on these subspaces be zero[1]:

$$\{\, a\,,\, b\,\} = 0\ , \qquad a, b \in Cr\ ;$$

$$\{\, a\,,\, b\,\} = 0\ , \qquad a, b \in De\ .$$

   The subspace Cr we will call *creating*, and De — *destructing*. In accordance with the construction given above, for subspaces Cr and De we have some corresponding subspaces in the algebra of operators; let us denote these subspaces $Cr\widehat{\ }$ and $De\widehat{\ }$, correspondingly.

   Let us introduce also a notation $\mathcal{C}\widehat{\ }$ for the subspace of the algebra of operators that corresponds to the subspace $\mathcal{C}$ of the Lie algebra $\mathcal{C} \oplus Z^*_{\mathbb{C}}$.

[1] Taking into account (2) and (3), it is enough to require that it is zero on one of these subspaces.

9. Let us span now the left ideal on the subspace $De^\frown$, i. e. let us join to operators there operators that are obtained from them by finite number of operations of multiplication by scalar, addition, and multiplication from the left with arbitrary elements of the algebra $\mathcal{O}$.

   Let us factorize now the algebra $\mathcal{O}$ with respect to the constructed left ideal. In result we get some linear space. It is not an algebra, but it is a left module, i. e. there we have a naturally defined action of operators from the left. Elements of this factor-space are called *ket-vectors*. Ket-vectors are denoted with the symbols like $|\,x\,\rangle$, where x is any symbol describing the given vector. The space of ket-vectors is denoted $\mathcal{H}$ and is called *the space of states* of the quantized field.

10. We can perform the same construction with conjugate objects, i. e. instead of the subspace $De^\frown$ we can consider the subspace $Cr^\frown$, span on it the right ideal instead of left, and, factorizing, get the right module instead of left. The elements of this module are called *bra-vectors*. And this module we will call, if it does not make a misunderstanding, also *the space of states* of the quantized field, and we will denote it also as $\mathcal{H}$.

    Bra-vectors are denoted by symbols like $\langle\,x\,|$. The operation of conjugation is naturally spread to ket- and bra-vectors and defines the one-to-one correspondence between them. It is said that the ket- and bra-vectors, corresponding to each other, belong to the same state of the quantized field.

11. When we factorize the algebra of operators $\mathcal{O}$ and come to the spaces of ket- and bra-vectors, the operator $\hat{1}$ turns into some ket-vector $|\,0\,\rangle$ and bra-vector $\langle\,0\,|$, correspondingly. These ket- and bra-vectors describe the state which is called *vacuum*.

12. Let us introduce now the so called *scalar product* of bra- and ket- vectors. For an arbitrary bra-vector $\langle\,x\,|$ and a ket-vector $|\,y\,\rangle$ this product is written as $\langle\,x\,|\cdot|\,y\,\rangle$, or, for shortness, $\langle\,x\,|\,y\,\rangle$. As a result we get a complex number, i. e. $\langle\,x\,|\,y\,\rangle\in\mathbb{C}$.

    Let us require that the operation of scalar product would satisfy the following properties:

$$\langle\,0\,|\,0\,\rangle = 1\ ,$$

$$\big(\lambda\,\langle\,x\,|\big)\cdot|\,y\,\rangle = \lambda\cdot\langle\,x\,|\,y\,\rangle\ , \qquad \big(\langle\,x_1\,| + \langle\,x_2\,|\big)\cdot|\,y\,\rangle = \langle\,x_1\,|\,y\,\rangle + \langle\,x_2\,|\,y\,\rangle\ ,$$

$$\langle\,x\,|\cdot\big(\lambda\,|\,y\,\rangle\big) = \lambda\cdot\langle\,x\,|\,y\,\rangle\ , \qquad \langle\,x\,|\cdot\big(|\,y_1\,\rangle + |\,y_2\,\rangle\big) = \langle\,x\,|\,y_1\,\rangle + \langle\,x\,|\,y_2\,\rangle\ ,$$

$$\big(\langle\,x\,|\,\hat{o}\big)\cdot|\,y\,\rangle = \langle\,x\,|\cdot\big(\hat{o}\,|\,y\,\rangle\big)\ .$$

    In the latter equality $\hat{o}\in\mathcal{O}$; this property allows to write in such cases simply: $\langle\,x\,|\,\hat{o}\,|\,y\,\rangle$.

    The given properties for the scalar product are defining, i. e. there is not more than one scalar product satisfying the given properties.

13. The scalar product is a Hermitian form in $\mathcal{H}$, i. e. always $\langle\,x\,|\,y\,\rangle = (\langle\,y\,|\,x\,\rangle)^*$. If the scalar product turns out to be positive-definite, it defines in $\mathcal{H}$ some topology. If we complete $\mathcal{H}$ with respect to this topology, it turns into a usual Hilbert space. And operators appear to be defined on the corresponding dense linear subspace in $\mathcal{H}$.

    But the scalar product can be not positive-definite at all: it depends on the Poisson bracket in $\mathcal{C}\oplus Z^*_{\mathbb{C}}$ and the choice of the subspaces Cr and De. The question about definition of topology in this case for example of electromagnetic field will be discussed in the section 10.

So, in this section we have described how, if we have the Lie algebra of observables of a classical field $\mathcal{C}\oplus Z^*_{\mathbb{C}}$, we construct the algebra $\mathcal{O}$ of operators of the quantum field and the space of states $\mathcal{H}$. This construction is called *quantization* of a classical field.

3. Graduation of algebra $\mathcal{O}$ and of space $\mathcal{H}$. Connection with Fock construction. Consider now in the algebra of operators the subspaces $\mathcal{C}^\frown$, $Cr^\frown$ and $De^\frown$. Let us call them subspaces of the *grade* 0, $+1$ and -1, correspondingly. Making all possible products of these operators, let us assign to each such product a grade that is equal to the sum of grades of factors. If two products have the same grade, let us assign the same grade to their sum. It is easy to see that the algebra of operators, considered as a linear space, can be represented as a sum of its linear subspaces belonging to different grades:

$$\mathcal{O} = \ldots\oplus\mathcal{O}_{-2}\oplus\mathcal{O}_{-1}\oplus\mathcal{O}_0\oplus\mathcal{O}_{+1}\oplus\mathcal{O}_{+2}\oplus\ldots$$

And if $\hat{a}\in\mathcal{O}_i$ and $\hat{b}\in\mathcal{O}_j$, then $\hat{a}\,\hat{b}\in\mathcal{O}_{i+j}$. Shortly speaking, the algebra $\mathcal{O}$ is graded.

This graduation is naturally transferred to the space of states $\mathcal{H}$. And negative grades in the space $\mathcal{H}$ correspond to trivial subspaces. In other words, the space of states $\mathcal{H}$ is positive-graded:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \oplus \ldots \tag{4}$$

If a ket-vector belongs to one of the subspaces $\mathcal{H}_n$, we say that there are n particles in this state.

It is obvious also, that all this construction is possible also for conjugate objects, and decomposition (4) looks exactly the same for bra-vectors.

It is not out of place to mention here that, according to the introduced definition, the number of particles is always non-negative, and it does not depend on whether or not the scalar product in $\mathcal{H}$ is positive-definite.

It easy to see also that subspaces $\mathcal{H}_i$ and $\mathcal{H}_j$ are orthogonal with respect to the scalar product. In other words, if $\langle\, a \,|\in \mathcal{H}_i$ and $|\, b \,\rangle \in \mathcal{H}_j$ and $i \neq j$, then $\langle\, a \,|\, b \,\rangle = 0$. Taking it into account, we can write the decomposition (4) in the form:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \dot{+} \mathcal{H}_1 \dot{+} \mathcal{H}_2 \dot{+} \ldots \tag{5}$$

In the case when the scalar product is positive-definite, the decomposition (5) allows to establish connection with the usual Fock construction [3]. So far as this is quite simple, we will not discuss this connection in more details.

4. Invariant quantization. In the section 2 quantization of a classical field was described in “internal” notions of the invariant Hamiltonian formalism. But for the choice of the subspaces Cr and De we have not suggested any concrete prescription: we have just given some necessary conditions for the choice of these subspaces. In practice it leads to the situation that for one classical field we can get too many quantizations.

Let us suppose now that in the space $Z^*_{\mathbb{C}}$ there is a linear symplectic representation of some group. Let us define then *invariant quantization* by the requirement that subspaces Cr and De are invariant with respect to the action of this group. In other words, Cr and De are reducing subspaces of this representation.

When we consider relativistic fields, as a main group of invariance we have Poincare group $\mathcal{P}$. A quantization, invariant with respect to the Poincare group we will call $\mathcal{P}$ -invariant, for shortness. In the paper [IV] we have already seen, how the Poincare group acts in the space $Z^*_{\mathbb{C}}$, and how its representations are reduced.

Quantization of relativistic fields we will consider a little later, but now we will consider quantization of the harmonic oscillator. Its symmetry group is just the one-parameter group of time shifts.

5. Quantization of harmonic oscillator. Consider harmonic oscillator. It is described by the Lagrangian:

$$L = \tfrac{1}{2}\dot{\varphi}^2 - \tfrac{m^2}{2}\varphi^2 \ . \tag{6}$$

Here $\varphi(x)$ is a real function of one real argument (time).

The equation of the motion is:

$$(\partial^2 + m^2)\,\varphi = 0 \ .$$

The invariant phase space Z is a two-dimensional real space. The symplectic structure on it is given by the formula:

$$\omega = \dot{\varphi}(t) \wedge \varphi(t) \ .$$

Here forms $\dot{\varphi}$ and φ are taken in the same arbitrary moment of time t .

So far as the Lagrangian (6) is invariant with respect to time shifts, in the space Z we have the action of the additive group $\mathbb{R}$. The field representation $Z^*_{\mathbb{C}}$ in this case, like in the case of relativistic fields, decomposes into the direct sum of positive- and negative-frequency subrepresentations:

$$Z^*_{\mathbb{C}} = Z^{*\,(+)}_{\mathbb{C}} \oplus Z^{*\,(-)}_{\mathbb{C}} \ .$$

As a reducing basis let us take the following two elements:

$$a = \tfrac{1}{\sqrt{2m}}\,(m\varphi(0) + i\dot{\varphi}(0)) \ , \qquad a^* = \tfrac{1}{\sqrt{2m}}\,(m\varphi(0) - i\dot{\varphi}(0)) \ .$$

Really, so far as we have decomposition $\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2m}}(a\, e^{-imt} + a^* e^{+imt})$, we get that $a \in Z^{*\,(+)}_{\mathbb{C}}$, $a^* \in Z^{*\,(-)}_{\mathbb{C}}$.

Symplectic structure can be written by the forms a and a^* in the following way:

$$\omega = i\, a^* \wedge a \ .$$

The Poisson bracket of the corresponding linear functions is:

$$\{ a \, , \, a^* \} = -i \; .$$

So, in accordance with what we have said in the section 4, we have exactly two invariant quantizations: either $Cr = Z^{*\,(-)}_{\mathbb{C}}$ and $De = Z^{*\,(+)}_{\mathbb{C}}$, or $Cr = Z^{*\,(+)}_{\mathbb{C}}$ and $De = Z^{*\,(-)}_{\mathbb{C}}$. It is easy to see that the first quantization leads to positive-definite scalar product. In the case of second quantization scalar product turns out to be indefinite. And in the decomposition (5) on the subspaces with even number of particles the scalar product is positive-definite, and on subspaces with odd — negative.

6. Connection of invariant quantizations of field and of field oscillator. A field oscillator, as a finite-dimensional system, is more convenient for investigation by algebraic means. On the other hand, there is a close connection between quantization of a field and quantization of its oscillator.

Really, it is easy to see that the choice of $\mathbb{R} \times \mathcal{L}_{k^{(0)}}$ -invariant creation and destruction subspaces for oscillator and the choice of $\mathcal{P}$ -invariant creation and destruction subspaces for field are connected by the operation of induction. So, there is one-to-one correspondence between $\mathbb{R} \times \mathcal{L}_{k^{(0)}}$ -invariant quantizations of oscillator and $\mathcal{P}$ -invariant quantizations of field.

Furthermore, corresponding quantizations of oscillator and field have in the spaces of states scalar products either positive-definite or indefinite simultaneously. So, we get the convenient criterion of sign-definiteness of scalar product.

7. Quantization of scalar field. In the paper [IV] we have shown that with respect to the action of Poincare group the space of linear observables of scalar field $Z^*_{\mathbb{C}}$ decomposes into the direct sum of the two irreducible subspaces: $Z^*_{\mathbb{C}} = Z^{*\,(+)}_{\mathbb{C}} \oplus Z^{*\,(-)}_{\mathbb{C}}$. So, there are exactly two possibilities: either we accept $Cr = Z^{*\,(-)}_{\mathbb{C}}$ and $De = Z^{*\,(+)}_{\mathbb{C}}$, or we accept $Cr = Z^{*\,(+)}_{\mathbb{C}}$ and $De = Z^{*\,(-)}_{\mathbb{C}}$. According to the formulas for Poisson brackets of corresponding functions, obtained in the paper [IV], both decompositions satisfy all requirements of the section 2.

So, the scalar field allows exactly two $\mathcal{P}$ -invariant quantizations. The field oscillator in this case is just the usual one-dimensional real oscillator. Using results of the section 5 and the criterion from the section 6 we get that for the first quantization the scalar product in the space $\mathcal{H}$ turns out to be positive-definite, and for the second quantization - indefinite.

The first quantization is, in fact, conventional. Nevertheless, it should not be thought that quantization with indefinite metric is senseless, because it leads to “negative probabilities”. In principle, we can not reject a usefulness of such a theory where scattering states of the field constitute a subspace where the scalar product is positive-definite.

8. Quantization of electromagnetic field. Consider now quantization of electromagnetic field. Under electromagnetic field we will imply here “non-physical” electromagnetic field [I].

As we have explained in the paper [IV], with respect to the action of the Poincare group $\mathcal{P}$ the space $Z^*_{\mathbb{C}}$ in this case, like in the case of the scalar field, decomposes into the direct sum of the two indecomposable subspaces. Therefore, like in the case of the scalar field, we have exactly two possibilities: either $Cr = Z^{*\,(-)}_{\mathbb{C}}$ and $De = Z^{*\,(+)}_{\mathbb{C}}$, or $Cr = Z^{*\,(+)}_{\mathbb{C}}$ and $De = Z^{*\,(-)}_{\mathbb{C}}$.

Using the criterion from the section 6, we easily see that both quantizations lead to indefinite metric. Later on we will consider only the first of the two quantizations, because this quantization has useful physical interpretation.

The indefiniteness of the scalar product leads, of course, to difficulties with probability interpretation.

In the paper [I] we have pointed out that scattering states of the classical electromagnetic field satisfy additional condition — the Lorentz condition. It is natural to suppose that in the quantum theory there is some analog of this condition. It is important to emphasize, that this condition must appear in the quantum theory not as a new postulate: it must be derivable from the dynamical laws, like we have done it for the classical field. Unfortunately, we do not have a satisfactory theory of interacting fields yet. Because of this reason, we will not give here any derivation[2]. The desired condition is:

$$- \, i \, k_\mu \, \hat{a}^{(+)}_\mu(k) \, | \, \mathrm{rad} \, \rangle = 0 \; . \tag{7}$$

[2] A formal derivation, of course, was present even in [11]. On the other hand, it is possible to appeal to Feynman rules, but this rules need grounding from the point of view of this paper.

So, a vector of state of radiated field satisfies this equality for any k .

The given condition looks the same like one of versions of this condition in the classical theory. Nevertheless, it should be noticed that it can not be written as $-i\,k_\mu\,\hat a^{(-)}_\mu(k)\,|\,\mathrm{rad}\,\rangle = 0$ or as $-i\,k_\mu\,\hat a_\mu(k)\,|\,\mathrm{rad}\,\rangle = 0$, because even the vacuum does not satisfy these conditions[3].

Now we will show that the condition (7) leads to positivity of scalar product.

9. Positivity of scalar product of electromagnetic field. [4] Consider the field oscillator of electromagnetic field. Let us write here, for shortness, a_μ instead of $\hat a_\mu(+1)$ and a^*_μ instead of $\hat a_\mu(-1)$. These operators satisfy relations:

$$[\,a^*_\mu\,,\,a_\nu\,] = g_{\mu\nu}, \qquad [\,a^*_\mu\,,\,a^*_\nu\,] = 0, \qquad [\,a_\mu\,,\,a_\nu\,] = 0\ .$$

For the quantization under consideration we also have:

$$a_\mu\,|\,0\,\rangle = 0\ .$$

The additional condition takes the form:

$$k^{(0)}_\mu a_\mu\,|\,\mathrm{rad}\,\rangle = 0\ , \tag{8}$$

here $k^{(0)}_\mu$ is a fixed vector on the light cone. The subspace of the vectors of states satisfying this condition we will denote $\mathcal{H}^{\mathrm{rad}}$.

So far as the operator $k^{(0)}_\mu a_\mu$ has a definite grade (its grade is equal to -1), the graduation of the space of states $\mathcal{H}$ is transferred to the space $\mathcal{H}^{\mathrm{rad}}$:

$$\mathcal{H}^{\mathrm{rad}} = \mathcal{H}^{\mathrm{rad}}_0 \dot{+} \mathcal{H}^{\mathrm{rad}}_1 \dot{+} \mathcal{H}^{\mathrm{rad}}_2 \dot{+} \dots \tag{9}$$

In other words, the subspace, defined by the additional condition (8), also decomposes into the orthogonal sum of states with definite number of particles.

So far as the sum (9) is orthogonal, it is enough to prove the non-negativity of the scalar product for each of the subspaces $\mathcal{H}^{\mathrm{rad}}_n$.

An arbitrary state vector $|\,n\,\rangle$ from the subspace $\mathcal{H}^{\mathrm{rad}}_n$ can be represented in the form:

$$|\,n\,\rangle = T_{\mu\nu\ldots\rho}\,a^*_\mu\,a^*_\nu\ldots a^*_\rho\,|\,0\,\rangle\ ,$$

here $T_{\mu\nu\ldots\rho}$ is an n -valent tensor. This tensor can be supposed to be symmetrical, without loss of generality.

The condition (8) for the vector $|\,n\,\rangle$ turns out to be an additional condition for the tensor $T_{\mu\nu\ldots\rho}$:

$$k^{(0)}_\mu T_{\mu\nu\ldots\rho} = 0\ . \tag{10}$$

---

[3] In coordinate representation the condition $-i\,k_\mu\,\hat a_\mu(k)\,|\,\mathrm{rad}\,\rangle = 0$ looks as $\partial_\mu \hat A_\mu(x)\,|\,\mathrm{rad}\,\rangle = 0$. In literature even up to now there is no unity of opinions on whether or not it is possible to formulate the additional condition in this way. In this way, on the grounding of analogy with the classical field, it was formulated even by Fermi. It was pointed out in the papers [12, 13] that such an additional condition leads to difficulties with normalizability of states in the quantum case. In the paper [14] it was substituted with $\partial_\mu\,\hat A^{(+)}_\mu(x)\,|\,\mathrm{rad}\,\rangle = 0$. Later in literature some authors used condition $\partial_\mu\,\hat A_\mu(x)\,|\,\mathrm{rad}\,\rangle = 0$ [15, 16, 17]. Other [18] pointed that such a condition can not be applied, because there appears some contradiction with commutation relations. The other authors [19] claimed that such a condition can be used, but special care is needed, because allowed vectors of states turn out to be not-normalizable. These differences of opinion have quite deep reasons:

1. No exact meaning was put into the term "quantization". In fact, quantized electromagnetic field was studied by formal manipulations with algebraic symbols, but it was not given any constructive definition of this object. In such a situation the additional condition in any form is not free from criticism.

2. There is no satisfactory formulation of the theory of interacting fields (even in the frame of perturbation theory). And the Feynman rules do not have any clear connection with the operatoral formalism, and operatoral formalism turns out to be separated from practical calculations (from scattering theory, first of all).

With regards to the first remark, I believe, the relation $\partial_\mu\,\hat A_\mu(x)\,|\,\mathrm{rad}\,\rangle = 0$ does not contradict directly to the commutation relations. It is possible to say only that the construction of quantization presented in this paper is badly co-ordinated with such a condition.

The second remark is, of course, more important. When we considered the dynamics of the classical field, it was pointed out that the additional condition for scattering states automatically follows from dynamics, and it is not an arbitrary postulate. We have also clearly shown the role of the "non-physical" degrees of freedom. And though in this paper we still do not formulate a theory of quantum interacting fields, nevertheless, arguments based on analogy with the classical theory give us reasons to think that construction of theory with condition $\partial_\mu\,A_\mu(x)\,|\,\mathrm{rad}\,\rangle = 0$ is not a realistic task.

[4] The contents of this section does not have any deep connection neither with constructivity of quantization, nor with algebraic, nor with topological questions discussed in the present papers. The only reason why we discuss here this old (and very simple) question is that in all sources that I know an erroneous proof is given (for some reason people think that positivity of a quadratic form on vectors of some basis necessarily leads to positivity of the form in general).

The scalar product for the vector $|\,n\,\rangle$ multiplied by itself is:

$$\langle\, n\,|\, n\,\rangle = (-1)^n\, n! \,\cdot\, T^*_{\mu\nu\ldots\rho}\, T_{\mu\nu\ldots\rho} \;. \tag{11}$$

The value $(-1)^n\, n! \cdot T^*_{\mu\nu\ldots\rho}\, T_{\mu\nu\ldots\rho}$ is a sum of positive numbers, some of them are included in the sum with the sign "plus", and some of them with the sign "minus". This sign is defined by the relativistic summation rule by repeated indexes and by the factor $(-1)^n$. Let us show that this sum is non-negative under condition (10).

So far as the construction of the space of states is invariant with respect to the choice of the vector $k^{(0)}_\mu$, this vector can be supposed to be equal:

$$k^{(0)}_\mu = \left(\; k_0 \;\middle|\; 0 \quad 0 \quad k_0 \;\right)_\mu \;. \tag{12}$$

Consider now in the sum (11) all addends of the type $(-1)^n\, n! \cdot T^*_{0\nu\ldots\rho}\, T_{0\nu\ldots\rho}$. Because of (10) and (12), they are completely neutralized by the addends of the type $(-1)^n\, n! \cdot T^*_{3\nu\ldots\rho}\, T_{3\nu\ldots\rho}$.

Among remaining addends let us consider addends of the type $(-1)^n\, n! \cdot T^*_{\mu0\ldots\rho}\, T_{\mu0\ldots\rho}$. They are completely neutralized with the remaining addends of the type $(-1)^n\, n! \cdot T^*_{\mu3\ldots\rho}\, T_{\mu3\ldots\rho}$.

Et cetera. Finally, in the sum (11) there remain only addends that have indexes 1 or 2 . All these addends are included in the sum (11) with the sign "plus".

10. Topology and completeness of invariant phase space of electromagnetic field. When we studied the invariant Hamiltonian formalism, at the beginning we included into the invariant phase space Z only solutions of the equations of the motion that are smooth in coordinate representation and finite in space direction. But the question about what topology should be really introduced in the space Z we have not discussed at all. In fact, we have not given even an exact definition of the space Z^* ; we have not clarified, how exactly the functional spaces Z and Z^* turn out to be isomorphic; an exact definition of the Poisson brackets on Z^* was not given also. In this section we will show, that in the space Z we can introduce such a topology (and to complete it with respect to this topology), that it becomes very similar to the Hilbert space. And all necessary for invariant Hamiltonian formalism properties of this topology will be satisfied.

A symplectic structure itself does not define a topology. But between elements of the classical phase space Z and one-particle states of a quantized field there exist one-to-one correspondence:

$$\underline{c} \;\longleftrightarrow\; (I^{-1}\underline{c})\widehat{\;}\,|\,0\,\rangle \;. \tag{13}$$

Consider now the scalar field as an example. Among its invariant quantizations there is a quantization with positive-definite scalar product. The correspondence (13), firstly, introduces a complex structure in the space Z , and secondly, transfers there the scalar product from the one-particle quantum space $\mathcal{H}_1$. So, Z has natural structure of complex Hilbert space[5].

The symplectic structure turns out to be continuous with respect to the pair of its arguments with respect to the obtained topology; the symplectic structure defines the isomorphism of the spaces Z and Z^* ; the Poisson brackets are correctly defined on the whole Z^* .

Let us represent now the scalar field in the Fourier representation in the form:

$$\widetilde{\varphi}(k) = 2\pi\,\delta(k^2 - m^2)\cdot a(k) \;.$$

The correspondence (13) can be written more manifestly as:

$$\underline{c} \;\longleftrightarrow\; \int d\mu^+_m \cdot i\, a(k)^{\underline{c}} \cdot \hat{a}^*(k)\;|\,0\,\rangle \;, \qquad \text{here}\;\; d\mu^+_m = \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\cdot 2\pi\,\delta(k^2 - m^2)\cdot\theta(k) \;.$$

And the scalar product in the space Z takes the form:

$$\langle\, \underline{c}\,,\, \underline{d}\,\rangle = \int d\mu^+_m \cdot a^*(k)^{\underline{c}} \cdot a(k)^{\underline{d}} \;. \tag{14}$$

[5] The obtained topology is the most natural for quantization. Bohr and Rosenfeld [20] noticed that for consideration of the quantized electromagnetic field it is necessary to perform an averaging of the field in a small space-time volume: the symbol $\hat{A}_\mu(x)$ itself is not a physical value. Our consideration shows that this statement is in the same way true for the classical field also, if its phase space is provided with the "proper" topology.

The one-to-one transference of this scheme to the case of electromagnetic field appears to be impossible, because, as we have seen, among $\mathcal{P}$ -invariant quantizations of electromagnetic field there are no quantizations with positive-definite scalar product.

But here is another opportunity. Let us represent electromagnetic field in the Fourier representation as

$$\widetilde{A}_\mu(k) = 2\pi\,\delta(k^2)\cdot a_\mu(k)\ .$$

By analogy with the formula (14) let us introduce in the classical phase space Z of electromagnetic field a scalar product by the formula:

$$\langle\, \underline{c}\,,\, \underline{d}\,\rangle = \int d\mu_m^+ \cdot M_{\nu\rho}\cdot a_\nu^*(k)^{\underline{c}} \cdot a_\rho(k)^{\underline{d}}\ . \tag{15}$$

Here $M_{\nu\rho}$ is an arbitrary positive-definite Hermitian matrix. In the capacity of such a matrix we can take, for example, $M_{\nu\rho} = \mathrm{diag}\,(+1,+1,+1,+1)_{\nu\rho}$.

The scalar product (15) is positive-definite. Therefore it defines some topology in the space Z . The important is the fact that this topology does not depend on the concrete choice of matrix $M_{\nu\rho}$.

From this it follows that the introduced topology is relativistic-invariant.

With respect to the introduced topology the symplectic structure turns out to be continuous with respect to the pair of its arguments; the symplectic structure defines an isomorphism of the spaces Z and Z^* ; the Poisson brackets turn out to be correctly defined on the whole Z^* .

So, the invariant phase space of electromagnetic field has natural structure of linear complex topological space, and the topology there is defined by a set of equivalent (in the sense of topology) scalar products. Such spaces we will call *spaces of Hilbert type.*

11. Tensor product of spaces of Hilbert type. Now we will show that tensor product of spaces of Hilbert type is a space of Hilbert type.

Consider two such spaces X and Y . Their tensor product (more exactly, algebraic tensor product) is defined as follows.

Consider all formal products of the type $x\diamond y$, where $x\in X$ and $y\in Y$. We will call such products pairs. Let us suppose that pairs can be formally multiplied by complex numbers forming expressions of the type: $\lambda\cdot x\diamond y$. And consider all formal sums of the type:

$$\lambda_1\cdot x_1\diamond y_1 + \lambda_2\cdot x_2\diamond y_2 + \ldots + \lambda_n\cdot x_n\diamond y_n\ .$$

Let us consider two such sums to be equivalent, if they have the same sums of factors for each pair. So, we come to the complex vector space that we denote as $X\diamond Y$ (this is a *free* $\mathbb{C}$ *-module generated by the Cartesian product* $X\times Y$).

In the constructed space consider elements of the type:

$$1\cdot(\lambda x)\diamond y - \lambda\cdot x\diamond y\ ,$$

$$1\cdot x\diamond(\lambda y) - \lambda\cdot x\diamond y\ ,$$

$$1\cdot(x_1+x_2)\diamond y - 1\cdot x_1\diamond y - 1\cdot x_2\diamond y\ ,$$

$$1\cdot x\diamond(y_1+y_2) - 1\cdot x\diamond y_1 - 1\cdot x\diamond y_2\ .$$

The linear shell of these elements we denote as $X\circ Y$.

Factorizing $X\diamond Y$ with respect to $X\circ Y$ we come to the tensor product:

$$X\otimes Y = (X\diamond Y)/(X\circ Y)\ .$$

For shortness, let us introduce the notation $x\otimes y$. Namely, let us suppose that under the defined factorization an element $1\cdot x\diamond y$ of the space $X\diamond Y$ transfers into the element $x\otimes y$ of the space $X\otimes Y$.

If X and Y are usual Hilbert spaces, then, as it is known, their tensor product $X\otimes Y$ has natural structure of Hilbert space. The scalar product in $X\otimes Y$ in this case at the beginning is defined for pairs by the formula:

$$\langle\, x_1\otimes y_1\,,\, x_2\otimes y_2\,\rangle_{X\otimes Y} = \langle\, x_1\,,\, x_2\,\rangle_X \cdot \langle\, y_1\,,\, y_2\,\rangle_Y\ , \tag{16}$$

and for other elements it is spread by the requirement of linearity with respect to the second argument and anti-linearity with respect to the first. Performing completion of $X \otimes Y$ with respect to the given scalar product we come to Hilbert space.

In the case of spaces of Hilbert type each of the spaces X and Y has many equivalent scalar products. The space $X \otimes Y$, in accordance with the given scheme, gets many scalar products. Let us show that all these scalar products are equivalent.

So, suppose that in one of the two spaces, for example in X, we change the scalar product $\langle \cdot , \cdot \rangle_X$ to equivalent scalar product $(\cdot , \cdot)_X$. And the scalar product $\langle \cdot , \cdot \rangle_{X\otimes Y}$ in the space $X \otimes Y$ changes to $(\cdot , \cdot)_{X\otimes Y}$.

Consider some element of the space $X \otimes Y$:

$$z = x_1 \otimes y_1 + x_2 \otimes y_2 + \ldots + x_n \otimes y_n \ .$$

It is easy to see that this element can be represented in such a form that in this sum all $y_1, y_2, \ldots, y_n$ are orthogonal to each other with respect to the scalar product in Y. Then the scalar products of this element with itself take especially simple form:

$$\langle z , z \rangle_{X\otimes Y} = \langle x_1 , x_1 \rangle_X \cdot \langle y_1 , y_1 \rangle_Y + \langle x_2 , x_2 \rangle_X \cdot \langle y_2 , y_2 \rangle_Y + \ldots + \langle x_n , x_n \rangle_X \cdot \langle y_n , y_n \rangle_Y \ , \qquad (17)$$

$$(z , z)_{X\otimes Y} = (x_1 , x_1)_X \cdot \langle y_1 , y_1 \rangle_Y + (x_2 , x_2)_X \cdot \langle y_2 , y_2 \rangle_Y + \ldots + (x_n , x_n)_X \cdot \langle y_n , y_n \rangle_Y \ . \qquad (18)$$

A convenient necessary and sufficient criterion of equivalence of scalar products $\langle \cdot , \cdot \rangle_{X\otimes Y}$ and $(\cdot , \cdot)_{X\otimes Y}$ is the following: there exists such $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, that for any $z \in X \otimes Y$ we have the following conditions:

$$\varepsilon \cdot (z , z)_{X\otimes Y} < \langle z , z \rangle_{X\otimes Y} \ , \qquad \varepsilon \cdot \langle z , z \rangle_{X\otimes Y} < (z , z)_{X\otimes Y} \ .$$

But if such ε exists for the scalar products $\langle \cdot , \cdot \rangle_X$ and $(\cdot , \cdot)_X$, then in accordance with formulas (17) and (18), it is appropriate also for the scalar products $\langle \cdot , \cdot \rangle_{X\otimes Y}$ and $(\cdot , \cdot)_{X\otimes Y}$.

So, all scalar products in $X \otimes Y$ are equivalent. Performing completion of $X \otimes Y$ with respect to the topology defined by these scalar products we come to the space of Hilbert type.

12. Topology of space of states of quantized electromagnetic field. As we have seen, the space of states of quantized electromagnetic field $\mathcal{H}$ decomposes into orthogonal sum of subspaces with definite number of particles:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \dot{+} \mathcal{H}_1 \dot{+} \mathcal{H}_2 \dot{+} \ldots \qquad (19)$$

The space $\mathcal{H}_0$ is one-dimensional. So, the question about its topology does not arise.

The subspace $\mathcal{H}_1$, as it was shown in the section 10, can be in fact identified with the phase space of the classical field Z. It is the space of Hilbert type. So, the question about its topology is also solved.

Consider now the tensor product of the space Z with itself: $Z \otimes Z$. There we have naturally defined action of the group of transpositions of two elements. The simplest elements are transformed under action of this group as $\underline{a} \otimes \underline{b} \to \underline{b} \otimes \underline{a}$, and to other elements this action is spread by linearity.

Let us choose among the scalar products in the space $Z \otimes Z$ only those invariant with respect to the action of the group under consideration. In practice it is convenient just to restrict ourself with the products for which in the right part of the formula (16) we have product of the same scalar products.

Then the group of transpositions acts unitarily[6] in $Z \otimes Z$. And $Z \otimes Z$ decomposes into the orthogonal sum of two invariant subspaces: symmetric and anti-symmetric.

Each of these two subspaces inherits topology from $Z \otimes Z$.

It is easy to see that the two-particle quantum space $\mathcal{H}_2$ can be naturally identified with the symmetric subspace in $Z \otimes Z$ and therefore it gets corresponding topology.

Et cetera. n-particle subspace $\mathcal{H}_n$ is identified with fully symmetric subspace of n-th tensor power of Z. And inherits topology from there.

[6] Under unitary transformation of a space of Hilbert type we imply an automorphism of this space, i. e. one-to-one transformation on itself preserving linear structure and each of scalar products.

So, each of the subspaces in the orthogonal sum (19) is a space of Hilbert type. From practical point of view it is very convenient, because for practical applications it is much easier to define the described spaces using bases (and not as factor-spaces of free modules).

Consider now the space $\mathcal{H}$ as a whole. Using topologies introduced in its subspaces we can introduce different topologies in the whole space. For example, convergence of a directed set to zero can be understood as independent convergence to zero of all projections of this set. Such a topology seems to be the most natural in this case.

On the other hand, this requirement can be strengthened if we require additionally, for example, that starting from some moment only finite number of projections of the directed set differ from zero.

So, there are many natural topologies in $\mathcal{H}$. And the space $\mathcal{H}$ is not a space of Hilbert type.

In this connection I want to pay attention to the following. In the paper of Gupta [14] it was suggested to quantize electromagnetic field in usual Hilbert space with positive-definite metric. In fact, it is possible to do so considering quantizations invariant with respect to a more narrow group than the Poincare group (namely, with respect to the subgroup of the Poincare group that leaves the direction of the time axis unchanged). The subspaces with fixed number of particles turn out to be the same, in fact, that we constructed above. But the whole space $\mathcal{H}$ acquires such a topology that is not relativistic-invariant. And it turns out that some states of the field belong to the Hilbert space in one frame of reference and do not belong in other. So, the old Gupta formalism is not relativistic-invariant, even implicitly.

In his later papers Gupta tried to refuse from forced introduction of a sign-definite metric. But his last paper on this topic [22] clearly showed that he still had no apparently relativistic-invariant construction of quantized electromagnetic field (to say nothing of the problems with functional analysis).

13. About origin of anti-unitary transformations. In accordance with the introduced procedure of quantization, linear transformations of observables of a classical field that preserve Poisson brackets and the subspaces Cr and De generate unitary transformations of states of the quantized field. But it is known that in quantum theory an important role is played also by anti-unitary symmetry transformations. Consider their origin on the example of the operation of time reversal — T.

Suppose that the Lagrangian of a classical field is T-invariant (as examples we can use scalar and electromagnetic fields). Then the action turns out to be T-invariant also. Therefore, field functions satisfying the stationary action principle under the operation of time reversal transfer into functions that also satisfy the stationary action principle.

So, from the point of view of invariant Hamiltonian formalism, the operation of time reversal is a one-to-one transformation of the phase space Z on itself. And how does the symplectic structure change? It is obvious from the variational definition of symplectic structure that it changes sign. It seems to be natural to call such transformations, that change sign of symplectic structure, *anti-symplectic.*

Consider now conjugate action of the operation of time reversal on elements of the conjugate space $Z^*_{\mathbb{C}}$:

$$a \xrightarrow{T} a_T \ , \qquad a, a_T \in Z^*_{\mathbb{C}} \ .$$

The Poisson bracket changes sign under such a transformation:

$$\{\, a_T \, , \, b_T \,\} = - \{\, a \, , \, b \,\} \ .$$

So, the operation of time reversal generates the automorphism of the Lie algebra $\mathcal{C} \oplus Z^*_{\mathbb{C}}$.

In accordance with the procedure of quantization described in this paper, it is natural to wish to construct corresponding automorphism of the algebra of operators $\mathcal{O}$ for the quantized field. But it is impossible to do it. The reason is that for construction of the algebra of operators we used not only the structure of the Lie algebra of the set $\mathcal{C} \oplus Z^*_{\mathbb{C}}$ but also the special correspondence between the subspace $\mathcal{C}$ and the set of scalars $\mathbb{C}$ (the relation $\hat{1} = ()\hat{}$). It means that for bringing of the operation of time reversal to the quantum case we need some additional conventions, besides operation of quantization that we have already introduced.

Let us agree that words (i. e. elements of the semi-group $\mathcal{W}$) under time reversal are transformed in accordance with the following formula:

$$\hat{a}\,\hat{b} \ldots \hat{c} \xrightarrow{T} \hat{c}_T \ldots \hat{b}_T\, \hat{a}_T \ , \qquad \hat{a}, \hat{b}, \ldots, \hat{c}, \hat{a}_T, \hat{b}_T, \ldots, \hat{c}_T \in \mathcal{A} \ ,$$

i. e. every letter is substituted by the corresponding, and after that letters are written in the reverse order. It is obvious that time reversal acts on a product of two words in the following way:

$$\hat{p}\,\hat{q} \xrightarrow{T} \hat{q}_T\, \hat{p}_T \ , \qquad \hat{p}, \hat{q}, \hat{p}_T, \hat{q}_T \in \mathcal{W} \ .$$

A one-to-one transformation of a semi-group on itself that satisfies such a property can be called an *anti-automorphism.*

The constructed anti-automorphism of the semi-group of words $\mathcal{W}$ by linearity spreads to anti-automorphism of the algebra of phrases $\mathcal{P}$. Furthermore, it is easy to check that this anti-automorphism of the algebra of phrases generates an anti-automorphism of the algebra of operators $\mathcal{O}$.

Suppose now that under time reversal creation subspace Cr and destruction De transfer to one another. This condition is usually satisfied because these subspaces are negative- and positive-frequency, correspondingly. The left ideal spanned on $De^\frown$ under time reversal transfers into the right ideal spanned on $Cr^\frown$. The constructed by factorization left module transfers into the corresponding right module.

So, the operation of time reversal defines the one-to-one linear correspondence of ket- and bra-vectors[7].

As it can be easily seen, the scalar product is preserved under time reversal:

$$\langle\, x \,|\, y \,\rangle = \langle\, y_T \,|\, x_T \,\rangle \ . \tag{20}$$

So far as there is a one-to-one anti-linear correspondence between ket- and bra-vectors, we could make all our discussion inside one space, for example, the space of ket-vectors. Then the operation of time reversal could be considered as one-to-one anti-linear transformation of this space. The relation (20) shows that under this transformation the scalar product changes to complex-conjugate. A transformation satisfying such properties is called *anti-unitary.*

At the end I want to thank V. M. Shabaev, L. D. Faddeev, V. A. Franke, V. D. Lyakhovsky, L. V. Prokhorov, V. V. Vereschagin and Yu. M. Pis'mak for fruitful discussions.

References

[1] R. E. Peierls “The commutation laws of relativistic field theory”, Proc. Roy. Soc. (London) **A214**, 143-157 (1952).

[2] B. S. DeWitt *„Dinamicheskaya teoriya grupp i poley“*, M.: Nauka (1987). [B. S. DeWitt *“Dynamical theory of groups and fields”*, New York: Gordon and breach (1965).]

[3] V. A. Fock “Konfigurationsraum und zweite Quantelung”, Z. Phys. **75**, 622-647 (1932). [in Russian: „Konfiguratsionnoe prostranstvo i vtorichnoe kvantovanie“, in [4], pages 25-51.]

[4] V. A. Fock *„Raboty po kvantovoy teorii polya“*, L.: izd-vo LGU (1957).

[5] G. Mackey *„Predstavleniya grupp v gilbertovom prostranstve“*, appendix in the book [6]. [G. W. Mackey “Group representations in Hilbert space”, appendix in the book [6].]

[6] I. Segal *„Matematicheskie problemy relyativistskoy fiziki“*, M.: Mir (1968). [I. E. Segal *“Mathematical problems of relativistic physics”*, Providence, Rhode island: AMS (1963).]

[7] S. Weinberg *“The quantum theory of fields”*, v. 1: *“Foundations”*, Cambridge univ. press (1996).

[8] A. S. Schwarz *„Matematicheskie osnovy kvantovoy teorii polya“*, M.: Atomizdat (1975).

[9] A. A. Kirillov „Geometricheskoe kvantovanie“, Itogi nauki i tekhn. Sovr. probl. mat. Fund. napr. **4**, 141-178 (1985).

[10] F. A. Berezin „Kontinual'nyy integral po traektoriyam v fazovom prostranstve“, UFN **132**(3), 497-548 (1980).

[11] K. Bleuler “Eine neue Methode zur Behandlung der longitudinalen und skalaren Photonen”, Helv. Phys. Acta **23**(5), 567-586 (1950).

[12] S. T. Ma “Relativistic formulation of the quantum theory of radiation”, Phys. Rev. **75**, 535-535 (1949).

[7] Schwinger suggested [23] to interpret ket-vectors as symbols denoting creation of system in the past; bra-vectors as symbols denoting destruction of system in future; and operators as action of instruments during experiment. Such an interpretation turns out to be quite natural here.

[13] F. J. Belinfante “On the part played by scalar and longitudinal photons in ordinary electromagnetic fields”, Phys. Rev. **76**(2), 226-233 (1949).

[14] S. N. Gupta “Theory of longitudinal photons in quantum electrodynamics”, Proc. Phys. Soc. A **63**(7), 681-691 (1950).

[15] W. E. Thirring *„Printsipy kvantovoy elektrodinamiki“*, M.: Vysshaya shkola (1964). [W. E. Thirring *“Principles of quantum electrodynamics”*, New York: Academic press (1958).]

[16] H. Umezawa *„Kvantovaya teoriya polya“*, M.: IL (1958). [H. Umezawa *“Quantum field theory”*, Amsterdam: North-Holland publ. (1956).]

[17] P. A. M. Dirac *„Printsipy kvantovoy mekhaniki“*, M.: Nauka (1979). [P. A. M. Dirac *“The principles of quantum mechanics”*, Oxford: Clarendon press (1958).]

[18] N. N. Bogoliubov, D. V. Shirkov *„Vvedenie v teoriyu kvantovannykh poley“*, M.: Nauka (1984).

[19] L. V. Prokhorov „Kvantovanie elektromagnitnogo polya“, UFN **154**(2), 299-320 (1988).

[20] N. Bohr, L. Rosenfeld “Zur Frage der Messbarkeit der elektromagnetischen Feldgrössen”, Kgl. Danske Vidensk. Selskab., Math.-Fys. Medd. **12**(8), 3-65 (1933). [in Russian: „K voprosu ob izmerimosti elektromagnitnogo polya“, in: [21], v. 2, pages 120-162.]

[21] N. Bohr *„Izbrannye nauchnye trudy“*, v. 2, M.: Nauka (1971).

[22] S. N. Gupta “Lorentz covariance of quantum electrodynamics with the indefinite metric”, Prog. Theor. Phys. **21**(4), 581-584 (1959).

[23] J. Schwinger *„Kvantovaya kinematika i dinamika“*, M.: Nauka (1992). [J. Schwinger *“Quantum kinematics and dynamics”*, New York: W. A. Benjamin, Inc. (1970).]

arXiv:math-ph/0402003v1 4 Feb 2004

О квантовании электромагнитного поля. VI. Квантование.

Д. А. Арбатский*

7 февраля 2008 г.

Аннотация

Описана общая методика квантования линейных полей. Введена концепция квантования, инвариантного по отношению к действию некоторой группы. Явно релятивистски-инвариантно строится пространство квантовых состояний для релятивистских полей. Устанавливается связь с квантованием полевого осциллятора. Обосновывается необходимость использования индефинитного скалярного произведения для электромагнитного поля. Обсуждается дополнительное условие на „физически допустимые“ состояния электромагнитного поля. Обсуждаются свойства пространства состояний электромагнитного поля с точки зрения функционального анализа. Рассмотрен вопрос о происхождении антиунитарных преобразований в квантовой теории поля.

1. Другие подходы к квантованию. Прежде чем приступать к описанию конструкции квантованного поля, дадим краткое сравнение нашей конструкции с другими известными подходами к описанию квантовых полей.

- **Метод формальных манипуляций.** Этот метод применялся уже в самых ранних работах по квантовой теории поля. Его суть состоит в том, чтобы вычислять скобки Пуассона классических величин и считать, что для соответствующих квантовых величин коммутаторы вычисляются по формуле:

  $$[\,\hat{a}\,,\,\hat{b}\,] = i\,\{\,a\,,\,b\,\}^{\frown}\,. \tag{1}$$

  Приведённая формула, конечно, не может выполняться для всех величин. Тем не менее, если её применять достаточно осторожно, то можно выяснить многие свойства квантованных полей, при этом вообще не уточняя, что они из себя представляют. Этот путь, в действительности, оказался самым продуктивным с точки зрения практических приложений.

  Что касается того, как вычислялись скобки Пуассона, то делалось это таким образом, что усмотреть релятивистскую инвариантность даже в классической теории было очень трудно. Впоследствии, правда, Пайерлс [1] предложил альтернативный способ установления коммутационных соотношений, который был явно релятивистски-инвариантным. Соответствующая классическая скобка, фигурирующая в выражении (1), была даже названа „скобкой Пайерлса“. Довольно сложное „физическое“ обоснование соотношений (1), используемых при квантовании по методу Пайерлса, имеется в [2].

  Описанный подход нам наиболее близок.

  Относительно классического описания релятивистских полей можно сказать, что инвариантный гамильтонов формализм позволяет определить скобку Пуассона полностью релятивистски инвариантно. При таком подходе понятие скобки Пуассона видоизменяется таким образом, что скобка Пайерлса оказывается её очень частным случаем. Методика практического вычисления скобок Пуассона в инвариантном гамильтоновом формализме была нами описана в статье [I].

  Что касается квантования полей, то в данной статье оно будет произведено *конструктивно*: на основе развитого в [I] инвариантного гамильтонова формализма, используя обычные алгебраические методы, мы построим в этой статье квантованные поля явно.

- **Метод ящика.** Этот метод также был популярен в теории поля со времён её зарождения. Он состоит в том, чтобы рассматривать поле не в бесконечном пространстве, а в большом ящике с периодическими

*http://d-a-arbatsky.narod.ru/

граничными условиями. При этом описание поля становится подобно описанию бесконечного количества осцилляторов.

Введение ящика принципиально разрушает релятивистскую инвариантность, и уже этой причины достаточно, чтобы не рассматривать этот метод здесь в подробностях.

Однако, в результате применения этого метода возникло полезное понятие полевого осциллятора. В этом плане следует заметить, что в нашем методе имеется аналогичное понятие (введённое в статье [IV]). У нас оно вводится несколько более абстрактно, с помощью понятия индуцированного симплектического представления. Только таким путём возможно установить правильную теоретико-групповую природу полевого осциллятора и связать инвариантные квантования поля с инвариантными квантованиями осциллятора.

- **Конструкция Фока и теория Вигнера-Макки.** В работе [3] Фок указал, что пространство состояний квантованного поля устроено как симметризованная тензорная экспонента одночастичного подпространства. Впоследствии Вигнером и Макки был разработан метод поиска всевозможных одночастичных подпространств, основанный на теории индуцированных унитарных представлений группы Пуанкаре (см., например, обзор [5]). Весьма подробное современное изложение этого подхода имеется в книге [7].

  Недостатки этого подхода состоят в следующем. Во-первых, операторы рождения и уничтожения квантов с самого начала вводятся с помощью довольно сложных формул. Во-вторых, даже когда введены такие операторы, требуются весьма запутанные рассуждения, чтобы построить из них локальные операторы *поля*. В-третьих, при таком подходе вообще выпадают из рассмотрения поля с индефинитным скалярным произведением.

  В нашем подходе исходным объектом выступает не одночастичное квантовое подпространство, а классическое поле, описанное на языке инвариантного гамильтонова формализма. При этом второй недостаток автоматически исчезает, т. к. появление полевых операторов у нас происходит сразу же при квантовании.

  Операторы рождения и уничтожения квантов у нас также могут быть введены. При этом формулы для них вытекают из самой алгебраической конструкции квантованного поля, а не постулируются изначально.

  Что касается квантованных полей с индефинитным скалярным произведением, то они у нас возникают столь же естественно, как и поля с положительно-определённым скалярным произведением. Наша схема действительно является более общей, как в этом можно убедиться уже на примере массивного скалярного поля. Благодаря этой общности, схема совершенно естественно включает в себя электромагнитное поле как частный случай.

  Отметим также, что в нашем подходе имеется также и аналог теории Вигнера-Макки. Это теория индуцированных симплектических представлений группы Пуанкаре [IV]. Теория индуцированных симплектических представлений является более богатой, чем теория индуцированных унитарных представлений.

- **Подход в духе теоремы Стоуна-фон Неймана.** В квантовой механике при изучении квантового осциллятора оказывается полезной теорема Стоуна-фон Неймана, утверждающая, что канонические коммутационные соотношения для координат и импульсов однозначно определяют соответствующее неприводимое унитарное представление. Естественно, этот подход пытались перенести на квантовую теорию поля.

  Но теорема Стоуна-фон Неймана на случай квантования систем с бесконечным числом степеней свободы непосредственно не переносится (см., например, [8]). Были проведены большие исследования с целью преодолеть эту трудность. Несмотря на их несомненную ценность, думается всё же, что они оказались слишком оторванными от практических приложений.

  Здесь стоит также отметить, что если отказаться от положительной определённости скалярного произведения в пространстве квантовых состояний, то единственность квантования нарушается уже в случае одномерного гармонического осциллятора. Поэтому наш путь отличается от описанного принципиальным образом: мы отказываемся от требования положительной определённости скалярного произведения, но взамен вводим концепцию инвариантного квантования.

  Отметим здесь также такую деталь. При формулировке теоремы Стоуна-фон Неймана коммутационные соотношения необходимо записывать в форме соотношений Вейля. В нашем же подходе фигурируют коммутационные соотношения для самих неограниченных операторов. При этом сама конструкция квантования строго определяет, в каком смысле их следует понимать.

- **Геометрическое квантование.** Метод геометрического квантования состоит в том, чтобы, опираясь на геометрию классического фазового пространства, построить пространство квантовых состояний как некоторое множество функций на классическом фазовом пространстве (см., например, [9]).

С точки зрения инвариантного гамильтонова формализма эту схему естественно применять к инвариантному фазовому пространству Z. Заметим, однако, что у этого подхода сразу же видны значительные трудности. Во-первых, сделать этот подход математически строгим для случая систем с бесконечным числом степеней свободы совсем не просто. Во-вторых, связь с конструкцией Фока в этом случае осуществляется с помощью не слишком очевидных формул. По этим причинам такой подход оказывается не очень удобен для практических приложений. В-третьих, не ясно, каким образом с помощью этого подхода можно описать случай квантования с индефинитным скалярным произведением: уже в случае одномерного гармонического осциллятора возникают большие трудности с определением индефинитного скалярного произведения.

- **Метод континуального интеграла.** Этот метод стал в последнее время очень популярен в связи с тем, что он будто бы является явно релятивистски-инвариантным. При этом с континуальным интегралом работают фактически как с символической формой записи некоторых выражений.

  Можно, однако, рассматривать континуальный интеграл как строго определённый математический объект (см., например, [10]). Такой подход наталкивается на такие существенные трудности, что ни о какой „очевидной“ релятивистской инвариантности не может быть и речи.

2. Квантование. Опишем теперь, как, имея классическое поле, следует строить поле квантовое.

1. Рассмотрим множество (комплексных) функций, постоянных на всём пространстве Z. Обозначим это множество как $\mathcal{C}$. Рассмотрим далее прямую сумму $\mathcal{C} \oplus Z^*_{\mathbb{C}}$. Скобка Пуассона превращает эту прямую сумму в комплексную алгебру Ли.

2. Отвлекаясь пока от алгебраической структуры множества $\mathcal{C} \oplus Z^*_{\mathbb{C}}$ и рассматривая все его элементы как совершенно независимые, будем называть это множество *алфавитом* $\mathcal{A}$, а его элементы *буквами*. Договоримся также, что элемент $\mathcal{C} \oplus Z^*_{\mathbb{C}}$, рассматриваемый как буква алфавита $\mathcal{A}$, будет дополнительно снабжаться „шляпкой“ сверху или сбоку, например: $\hat{a} = a\widehat{\ }$.

3. Можно далее ввести формальное умножение элементов алфавита. А именно, будем считать, что при перемножении (конечного) набора букв образуется *слово*, состоящее из этих букв (порядок следования букв является существенным):

$$\hat{a}_1 \cdot \hat{a}_2 \cdot \ldots \cdot \hat{a}_k = \hat{a}_1 \hat{a}_2 \ldots \hat{a}_k \ , \qquad \hat{a}_1, \hat{a}_2, \ldots, \hat{a}_k \in \mathcal{A} \ .$$

   Слова мы будем также обозначать символами со шляпкой, например: $\hat{w} = w\widehat{\ }$. Множество всех возможных слов обозначим символом $\mathcal{W}$; при этом целесообразно включить сюда и слово нулевой длины, которое можно обозначить как $()\widehat{\ }$. Естественно считать, что и на множестве слов $\mathcal{W}$ действует операция умножения, которая „склеивает“ слова. Таким образом, $\mathcal{A}$ является *системой свободных образующих*, а $\mathcal{W}$ является *свободной полугруппой с единицей* (роль единицы в ней играет специально привнесённый элемент $()\widehat{\ }$).

4. Подобным же образом определим теперь формальную сумму (конечного) набора слов, домноженных на произвольные (комплексные) коэффициенты. А именно, назовём *фразой* формальную запись вида:

$$\lambda_1 \hat{w}_1 + \lambda_2 \hat{w}_2 + \ldots + \lambda_m \hat{w}_m \ , \qquad \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{C} \ , \quad \hat{w}_1, \hat{w}_2, \ldots, \hat{w}_m \in \mathcal{W} \ .$$

   Будем, кроме того, считать две фразы эквивалентными, если для любого слова у них совпадает сумма коэффициентов при этом слове. Множество всех введённых таким образом классов эквивалентности обозначим символом $\mathcal{P}$.

   На множестве фраз $\mathcal{P}$ можно теперь естественным образом ввести операции сложения и умножения на скаляр. А именно, суммой двух фраз называется фраза, получающаяся соединением исходных фраз знаком „ $+$ “. Умножение фразы на число определяется как умножение каждого из коэффициентов на это число. Тем самым $\mathcal{P}$ наделяется естественной структурой комплексного линейного пространства ($\mathcal{P}$ является *свободным* $\mathbb{C}$ *-модулем, порождённым* $\mathcal{W}$).

   На множестве фраз $\mathcal{P}$ можно также ввести естественным образом операцию умножения двух элементов. Именно, произведение двух фраз, содержащих по одному слову, определим равенством:

$$(\lambda_1 \hat{w}_1) \cdot (\lambda_2 \hat{w}_2) = (\lambda_1 \lambda_2)\,(\hat{w}_1 \hat{w}_2) \ , \qquad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C} \ , \quad \hat{w}_1, \hat{w}_2 \in \mathcal{W} \ .$$

   На произвольные фразы распространим это определение, исходя из требования дистрибутивности:

$$\hat{p}_1 \cdot (\hat{p}_2 + \hat{p}_3) = \hat{p}_1 \hat{p}_2 + \hat{p}_1 \hat{p}_3 \ , \qquad (\hat{p}_1 + \hat{p}_2) \cdot \hat{p}_3 = \hat{p}_1 \hat{p}_3 + \hat{p}_2 \hat{p}_3 \ , \qquad \hat{p}_1, \hat{p}_2, \hat{p}_3 \in \mathcal{P} \ .$$

5. Таким образом, множество фраз $\mathcal{P}$ превращается в (ассоциативную) алгебру ($\mathcal{P}$ является *полугрупповой алгеброй полугруппы* $\mathcal{W}$ или *свободной алгеброй над полугруппой* $\mathcal{W}$).

6. До сих пор при построении алгебры $\mathcal{P}$ алфавит $\mathcal{A}$ рассматривался как совершенно произвольное множество. Теперь, используя структуру алгебры Ли в $\mathcal{C}\oplus Z^*_{\mathbb{C}}$ и соответствие между подпространством $\mathcal{C}$ и полем скаляров $\mathbb{C}$, можно дополнительно внести в алгебру $\mathcal{P}$ некоторые *определяющие соотношения*. Это делается с помощью факторизации алгебры $\mathcal{P}$ по подходящему идеалу.

   Именно, рассмотрим все фразы следующих видов:

$$(\lambda\, a)\widehat{\ } - \lambda\, \hat{a} \ ,$$

$$(a+b)\widehat{\ } - (\hat{a}+\hat{b}) \ ,$$

$$\{\, a\, ,\, b\,\}\widehat{\ } + i\,(\hat{a}\,\hat{b} - \hat{b}\,\hat{a}) \ ,$$

$$\hat{1} - ()\widehat{\ } \, .$$

   Здесь $\lambda\in\mathbb{C}$, $a, b\in\mathcal{C}\oplus Z^*_{\mathbb{C}}$, $\hat{a}, \hat{b}\in\mathcal{A}$. 1 — обозначение для функции, равной 1 на всём инвариантном фазовом пространстве Z , т. е. $1\in\mathcal{C}\oplus Z^*_{\mathbb{C}}$; $\hat{1}$ — соответствующий ей элемент алфавита, $\hat{1}\in\mathcal{A}$.

   Натянем на указанные фразы двусторонний идеал, т. е. присоединим к ним те фразы, которые получаются из указанных путём применения конечного числа операций умножения на скаляр, сложения и умножения (слева и справа) на произвольные фразы. Факторизуя алгебру $\mathcal{P}$ по построенному идеалу получаем алгебру, которую мы будем называть *алгеброй операторов* и обозначать $\mathcal{O}$. Элементы этой алгебры называются *операторами* и обозначаются так же, как и соответствующие им фразы.

   Проведённая факторизация приводит к тому, что в алгебре операторов выполняются определяющие соотношения:

$$(\lambda\, a)\widehat{\ } = \lambda\, \hat{a} \ ,$$

$$(a+b)\widehat{\ } = \hat{a}+\hat{b} \ ,$$

$$\{\, a\, ,\, b\,\}\widehat{\ } = -\, i\,[\, \hat{a}\, ,\, \hat{b}\,] \ ,$$

$$\hat{1} = ()\widehat{\ } \, .$$

   В третьем соотношении использовано стандартное обозначение для *коммутатора* двух операторов: $[\, \hat{a}\, ,\, \hat{b}\,] = \hat{a}\,\hat{b} - \hat{b}\,\hat{a}$.

   Четвёртое соотношение, в частности, позволяет отказаться от громоздкого обозначения $()\widehat{\ }$, когда речь идёт об операторе, и писать всегда $\hat{1}$.

7. Введём теперь операцию *сопряжения*. Эта операция будет всегда обозначаться символом * , независимо от того, к какого рода объекту она применяется.

   Под сопряжением комплексного числа будем понимать обычное комплексное сопряжение.

   Элементы пространства $\mathcal{C}\oplus Z^*_{\mathbb{C}}$ являются функциями на Z . Под сопряжением, применённым к такой функции, будем понимать переход к функции с комплексно-сопряжёнными значениями. Очевидно, в результате также получается элемент пространства $\mathcal{C}\oplus Z^*_{\mathbb{C}}$. Более того, поскольку скобка Пуассона в $\mathcal{C}\oplus Z^*_{\mathbb{C}}$ является комплексификацией вещественной скобки Пуассона, выполняется равенство:

$$\{\, a^*\, ,\, b^*\,\} = \{\, a\, ,\, b\,\}^* \ . \tag{2}$$

   Определение сопряжения естественно переносится на элементы алфавита $\mathcal{A}$:

$$(\hat{a})^* = (a^*)\widehat{\ } \, .$$

   На слова и на фразы операция сопряжения распространяется по правилам:

$$(\hat{a}\,\hat{b})^* = \hat{b}^*\,\hat{a}^* \ , \qquad (\lambda\,\hat{a})^* = \lambda^*\,\hat{a}^* \ , \qquad (\hat{a}+\hat{b})^* = \hat{a}^* + \hat{b}^* \ .$$

   Здесь $\hat{a}$ и $\hat{b}$ могут быть буквами, словами и фразами; λ — комплексное число.

   Очевидно, операция сопряжения корректно переносится с фраз на операторы.

8. Рассмотрим теперь пространство $Z^*_{\mathbb{C}}$. Разобьём его в прямую сумму двух подпространств:

$$Z^*_{\mathbb{C}} = Cr \oplus De \ .$$

От подпространств Cr и De потребуем, во-первых, чтобы они переходили друг в друга при сопряжении:

$$Cr^* = De \ . \tag{3}$$

Во-вторых, потребуем, чтобы скобка Пуассона на этих подпространствах занулялась[1]:

$$\{ a \, , \, b \} = 0 \ , \qquad a, b \in Cr \ ;$$

$$\{ a \, , \, b \} = 0 \ , \qquad a, b \in De \ .$$

Подпространство Cr будем называть *рождающим*, а De — *уничтожающим*. В соответствии с приведённой выше конструкцией, подпространствам Cr и De соответствуют некоторые подпространства в алгебре операторов; обозначим эти подпространства $Cr\hat{}$ и $De\hat{}$, соответственно.

Введём также обозначение $\mathcal{C}\hat{}$ для подпространства алгебры операторов, отвечающего подпространству $\mathcal{C}$ алгебры Ли $\mathcal{C} \oplus Z^*_{\mathbb{C}}$.

9. Натянем теперь на подпространство $De\hat{}$ левый идеал, т. е. присоединим к имеющимся там операторам те операторы, которые получаются из указанных в результате конечного числа операций умножения на скаляр, сложения и домножения слева на произвольные элементы алгебры $\mathcal{O}$.

   Факторизуем теперь алгебру $\mathcal{O}$ по построенному левому идеалу. В результате получится некоторое линейное пространство. Оно не является алгеброй, но является левым модулем, т. е. на нём естественно определено действие операторов слева. Элементы этого факторпространства называются *кет-векторами*. Кет-векторы обозначаются символами вида $| \, x \, \rangle$, где x — любой значок, отличающий данный кет-вектор. Само пространство кет-векторов обозначается $\mathcal{H}$ и называется *пространством состояний* квантованного поля.

10. Можно провести те же самые построения с сопряжёнными объектами, т. е. вместо подпространства $De\hat{}$ рассмотреть подпространство $Cr\hat{}$, натянуть на него правый идеал вместо левого, и, факторизуя, получить правый модуль вместо левого. Элементы этого модуля называются *бра-векторами*. Сам же модуль будем, если это не вызывает недоразумений, также называть *пространством состояний* квантованного поля и обозначать $\mathcal{H}$.

    Бра-векторы обозначаются символами вида $\langle \, x \, |$. Операция сопряжения естественным образом переносится на кет- и бра-векторы и устанавливает между ними взаимно-однозначное соответствие. Говорят, что соответствующие друг другу кет- и бра-вектор относятся к одному и тому же состоянию квантованного поля.

11. При факторизации алгебры операторов $\mathcal{O}$ и переходе к пространствам кет- и бра-векторов, оператор $\hat{1}$ переходит в некоторый кет-вектор $| \, 0 \, \rangle$ и бра-вектор $\langle \, 0 \, |$, соответственно. Эти кет- и бра-векторы описывают состояние, называемое *вакуумом*.

12. Введём теперь так называемое *скалярное произведение* бра- и кет- векторов. Для произвольных бра-вектора $\langle \, x \, |$ и кет-вектора $| \, y \, \rangle$ это произведение записывается как $\langle \, x \, | \cdot | \, y \, \rangle$, или, для краткости, $\langle \, x \, | \, y \, \rangle$. В результате образуется комплексное число, т. е. $\langle \, x \, | \, y \, \rangle \in \mathbb{C}$.

    Потребуем, чтобы операция скалярного произведения обладала следующими свойствами:

$$\langle \, 0 \, | \, 0 \, \rangle = 1 \ ,$$

$$\big(\lambda \, \langle \, x \, | \big) \cdot | \, y \, \rangle = \lambda \cdot \langle \, x \, | \, y \, \rangle \ , \qquad \big(\langle \, x_1 \, | + \langle \, x_2 \, | \big) \cdot | \, y \, \rangle = \langle \, x_1 \, | \, y \, \rangle + \langle \, x_2 \, | \, y \, \rangle \ ,$$

$$\langle \, x \, | \cdot \big(\lambda \, | \, y \, \rangle \big) = \lambda \cdot \langle \, x \, | \, y \, \rangle \ , \qquad \langle \, x \, | \cdot \big(| \, y_1 \, \rangle + | \, y_2 \, \rangle \big) = \langle \, x \, | \, y_1 \, \rangle + \langle \, x \, | \, y_2 \, \rangle \ ,$$

$$\big(\langle \, x \, | \, \hat{o} \big) \cdot | \, y \, \rangle = \langle \, x \, | \cdot \big(\hat{o} \, | \, y \, \rangle \big) \ .$$

    В последнем равенстве $\hat{o} \in \mathcal{O}$; это свойство позволяет писать в таких случаях просто: $\langle \, x \, | \, \hat{o} \, | \, y \, \rangle$.

    Указанные свойства для скалярного произведения являются определяющими, т. е. существует не более одного скалярного произведения, обладающего указанными свойствами.

[1] С учётом (2) и (3), достаточно потребовать зануления только на одном из этих двух подпространств.

13. Скалярное произведение является эрмитовой формой в $\mathcal{H}$, т. е. всегда $\langle x\,|\,y\,\rangle = (\langle\,y\,|\,x\,\rangle)^*$. Если скалярное произведение окажется к тому же положительно-определённым, то оно задаёт в $\mathcal{H}$ некоторую топологию. Если $\mathcal{H}$ относительно этой топологии пополнить, то оно превращается в обычное гильбертово пространство. Операторы при этом оказываются заданными на соответствующем плотном линейном многообразии в $\mathcal{H}$.

   Однако, скалярное произведение может вовсе и не быть положительно-определённым: это зависит от скобки Пуассона в $\mathcal{C}\oplus Z^*_{\mathbb{C}}$ и выбора подпространств Cr и De . Вопрос об определении топологии в этом случае на примере электромагнитного поля будет обсуждаться в пункте 10.

Итак, в этом пункте было описано, как по алгебре Ли $\mathcal{C}\oplus Z^*_{\mathbb{C}}$ наблюдаемых классического поля строятся алгебра $\mathcal{O}$ операторов квантового поля и пространство состояний $\mathcal{H}$. Это построение называется *квантованием* классического поля.

3. Градуировка алгебры $\mathcal{O}$ и пространства $\mathcal{H}$. Связь с конструкцией Фока. Рассмотрим теперь в алгебре операторов подпространства $\mathcal{C}\widehat{\ }$, $Cr\widehat{\ }$ и $De\widehat{\ }$. Будем говорить, что они являются подпространствами *степени* 0 , $+1$ и -1 , соответственно. Далее, образуя всевозможные произведения этих операторов, присвоим каждому такому произведению степень, равную сумме степеней сомножителей. Если два произведения имеют одну и ту же степень, то припишем ту же степень их сумме. Нетрудно видеть, что таким образом алгебра операторов, рассматриваемая как линейное пространство, может быть представлена в виде суммы своих линейных подпространств, отвечающих разным степеням:

$$\mathcal{O} = \ldots\oplus\mathcal{O}_{-2}\oplus\mathcal{O}_{-1}\oplus\mathcal{O}_{0}\oplus\mathcal{O}_{+1}\oplus\mathcal{O}_{+2}\oplus\ldots$$

При этом, если $\hat a\in\mathcal{O}_i$ и $\hat b\in\mathcal{O}_j$, то $\hat a\,\hat b\in\mathcal{O}_{i+j}$. Короче говоря, алгебра $\mathcal{O}$ является градуированной.

Эта градуировка естественным образом переносится на пространство состояний $\mathcal{H}$. При этом отрицательным степеням в пространстве $\mathcal{H}$ отвечают тривиальные подпространства. Иначе говоря, пространство состояний $\mathcal{H}$ является положительно-градуированным:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0\oplus\mathcal{H}_1\oplus\mathcal{H}_2\oplus\ldots \tag{4}$$

Если кет-вектор принадлежит одному из пространств $\mathcal{H}_n$, то говорят, что в данном состоянии имеется n частиц.

Очевидно также, что всё проведённое построение имеет место и для сопряжённых объектов, и разложение (4) точно так же выглядит и для бра-векторов.

Нелишне также отметить, что согласно введённому определению, число частиц всегда неотрицательно, независимо от того, является ли скалярное произведение в $\mathcal{H}$ положительно-определённым.

Далее, легко видеть, что подпространства $\mathcal{H}_i$ и $\mathcal{H}_j$ ортогональны относительно скалярного произведения. Иначе говоря, если $\langle\,a\,|\in\mathcal{H}_i$ и $|\,b\,\rangle\in\mathcal{H}_j$ и $i\neq j$, то $\langle\,a\,|\,b\,\rangle = 0$. Имея это в виду, разложение (4) можно писать в виде:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0\dot{+}\mathcal{H}_1\dot{+}\mathcal{H}_2\dot{+}\ldots \tag{5}$$

В случае, когда скалярное произведение является положительно-определённым, разложение (5) позволяет установить связь с обычной конструкцией Фока [3]. Поскольку это довольно просто, мы не станем прослеживать эту связь здесь более подробно.

4. Инвариантное квантование. В пункте 2 квантование классического поля было описано во „внутренних“ терминах инвариантного гамильтонова формализма. Однако, для выбора подпространств Cr и De не было предложено никакого конкретного рецепта: были лишь указаны некоторые необходимые условия выбора этих подпространств. На практике это приводит к тому, что у одного и того же классического поля квантований может оказаться слишком много.

Пусть теперь в пространстве $Z^*_{\mathbb{C}}$ определено линейное симплектическое представление некоторой группы. Определим тогда *инвариантное квантование* требованием, чтобы подпространства Cr и De были инвариантными по отношению к действию данной группы. Иными словами, Cr и De — приводящие подпространства указанного представления.

Когда речь идёт о релятивистских полях, в качестве основной группы инвариантности выступает группа Пуанкаре $\mathcal{P}$. Квантование, инвариантное по отношению к группе Пуанкаре, будем для краткости называть

$\mathcal{P}$ -инвариантным. В статье [IV] мы уже видели, каким образом группа Пуанкаре действует в пространстве $Z^*_{\mathbb{C}}$, и как приводятся её представления.

Квантование релятивистских полей мы рассмотрим чуть позже, а сейчас обсудим квантование гармонического осциллятора. Его группа симметрии — это просто однопараметрическая группа временных сдвигов.

5. Квантование гармонического осциллятора. Рассмотрим гармонический осциллятор. Он описывается лагранжианом:

$$L = \tfrac{1}{2}\dot{\varphi}^2 - \tfrac{m^2}{2}\varphi^2 \ . \tag{6}$$

Здесь $\varphi(x)$ — вещественная функция одного вещественного аргумента (времени).

Уравнение движения имеет вид:

$$(\partial^2 + m^2)\,\varphi = 0 \ .$$

Инвариантное фазовое пространство Z — двумерное вещественное пространство. Симплектическая структура задаётся на нём формулой:

$$\omega = \dot{\varphi}(t) \wedge \varphi(t) \ .$$

Здесь формы $\dot{\varphi}$ и φ берутся в один и тот же произвольный момент времени t .

Поскольку лагранжиан (6) инвариантен относительно временных сдвигов, в пространстве Z действует представление аддитивной группы $\mathbb{R}$. Полевое представление $Z^*_{\mathbb{C}}$ в данном случае, так же как и у релятивистских полей, распадается в прямую сумму положительно- и отрицательно-частотного:

$$Z^*_{\mathbb{C}} = {Z^*_{\mathbb{C}}}^{(+)} \oplus {Z^*_{\mathbb{C}}}^{(-)} \ .$$

В качестве приводящего базиса возьмём следующие два элемента:

$$a = \tfrac{1}{\sqrt{2m}}\,(m\varphi(0) + i\dot{\varphi}(0)) \ , \qquad a^* = \tfrac{1}{\sqrt{2m}}\,(m\varphi(0) - i\dot{\varphi}(0)) \ .$$

Действительно, поскольку имеет место разложение $\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2m}}(a\,e^{-imt} + a^* e^{+imt})$, получаем, что $a \in {Z^*_{\mathbb{C}}}^{(+)}$, $a^* \in {Z^*_{\mathbb{C}}}^{(-)}$.

Симплектическая структура через формы a и a^* может быть записана следующим образом:

$$\omega = i\,a^* \wedge a \ .$$

Скобка Пуассона соответствующих линейных функций равна:

$$\{\,a\,,\,a^*\,\} = -i \ .$$

Таким образом, в соответствии со сказанным в пункте 4, имеются ровно два инвариантных квантования: либо $Cr = {Z^*_{\mathbb{C}}}^{(-)}$ и $De = {Z^*_{\mathbb{C}}}^{(+)}$, либо $Cr = {Z^*_{\mathbb{C}}}^{(+)}$ и $De = {Z^*_{\mathbb{C}}}^{(-)}$. Легко видеть, что первое квантование приводит к положительно-определённому скалярному произведению. При втором квантовании скалярное произведение оказывается индефинитным. Причём в разложении (5) на подпространствах с чётным числом частиц скалярное произведение определено положительно, а на подпространствах с нечётным — отрицательно.

6. Связь инвариантных квантований поля и полевого осциллятора. Полевой осциллятор, как конечномерную систему, удобнее исследовать алгебраическими средствами. С другой стороны, между квантованием поля и квантованием осциллятора имеется тесная связь.

В самом деле, легко видеть, что выбор $\mathbb{R}\times\mathcal{L}_{k^{(0)}}$ -инвариантных рождающих и уничтожающих подпространств у осциллятора и выбор $\mathcal{P}$ -инвариантных рождающих и уничтожающих подпространств у поля связаны операцией индуцирования. Таким образом, имеется взаимно-однозначное соответствие между $\mathbb{R}\times\mathcal{L}_{k^{(0)}}$ -инвариантными квантованиями осциллятора и $\mathcal{P}$ -инвариантными квантованиями поля.

Более того, у соответственных квантований осциллятора и поля скалярные произведения в пространствах состояний либо одновременно положительно-определённы, либо одновременно индефинитны. Таким образом, возникает удобный критерий знакоопределённости скалярного произведения.

7. Квантование скалярного поля. В статье [IV] было показано, что по отношению к действию группы Пуанкаре пространство линейных наблюдаемых скалярного поля $Z^*_{\mathbb{C}}$ распадается в прямую сумму двух неприводимых подпространств: $Z^*_{\mathbb{C}} = Z^{*\,(+)}_{\mathbb{C}} \oplus Z^{*\,(-)}_{\mathbb{C}}$. Таким образом, имеется ровно две возможности: либо положить $Cr = Z^{*\,(-)}_{\mathbb{C}}$ и $De = Z^{*\,(+)}_{\mathbb{C}}$, либо $Cr = Z^{*\,(+)}_{\mathbb{C}}$ и $De = Z^{*\,(-)}_{\mathbb{C}}$. Согласно вычисленным в статье [IV] формулам для скобок Пуассона соответствующих функций, оба разбиения удовлетворяет всем требованиям пункта 2.

Таким образом, скалярное поле допускает ровно два $\mathcal{P}$ -инвариантных квантования. Полевой осциллятор в данном случае — обычный одномерный вещественный осциллятор. Используя результаты пункта 5 и критерий из пункта 6, получаем, что при первом квантовании скалярное произведение в пространстве $\mathcal{H}$ оказывается положительно-определённым, а при втором - индефинитным.

Первое квантование фактически является общепринятым. Не следует думать, однако, что квантование с индефинитной метрикой заведомо бессмысленно, т. к. оно приводит к „отрицательным вероятностям“. В принципе, нельзя исключать полезности такой теории, в которой состояния рассеяния данного поля будут составлять подпространство, на котором скалярное произведение будет положительно-определённым.

8. Квантование электромагнитного поля. Рассмотрим теперь квантование электромагнитного поля. Здесь под электромагнитным полем будет пониматься „нефизическое“ электромагнитное поле [I].

Как было разъяснено в статье [IV], по отношению к действию группы Пуанкаре $\mathcal{P}$ пространство $Z^*_{\mathbb{C}}$ в этом случае, как и в случае скалярного поля, распадается в прямую сумму двух неразложимых подпространств. Поэтому, как и в случае скалярного поля, есть ровно две возможности: либо $Cr = Z^{*\,(-)}_{\mathbb{C}}$ и $De = Z^{*\,(+)}_{\mathbb{C}}$, либо $Cr = Z^{*\,(+)}_{\mathbb{C}}$ и $De = Z^{*\,(-)}_{\mathbb{C}}$.

Используя критерий из пункта 6, легко убеждаемся, что оба квантования приводят к индефинитной метрике. Далее мы будем рассматривать только первое из двух указанных квантований, поскольку именно оно имеет полезную физическую интерпретацию.

Индефинитность скалярного произведения, разумеется, порождает трудности с вероятностной интерпретацией.

В статье [I] было указано, что состояния рассеяния классического электромагнитного поля удовлетворяют дополнительному условию — условию Лоренца. Естественно предположить, что в квантовой теории имеется аналог этого условия. При этом хочется особо подчеркнуть, что это условие должно появляться в квантовой теории не как новый постулат: оно должно выводиться из динамических законов так же, как это мы проделали для классического поля. К сожалению, удовлетворительной теории взаимодействующих полей у нас пока нет. По этой причине никакого вывода здесь дано не будет[2]. Искомое условие имеет вид:

$$-\,i\,k_\mu\,\hat{a}^{(+)}_\mu(k)\,|\,\mathrm{rad}\,\rangle = 0\ . \tag{7}$$

То есть вектор состояния излучённого поля удовлетворяет указанному равенству для любого k .

Приведённое условие выглядит точно так же, как и один из вариантов этого условия в классической теории. Следует, однако, отметить, что его нельзя записать как $-\,i\,k_\mu\,\hat{a}^{(-)}_\mu(k)\,|\,\mathrm{rad}\,\rangle = 0$ или как $-\,i\,k_\mu\,\hat{a}_\mu(k)\,|\,\mathrm{rad}\,\rangle = 0$, ибо даже вакуум таким условиям не удовлетворяет[3].

[2] Формальная выкладка, конечно, имелась ещё в [11]. Кроме того, можно было бы апеллировать к правилам Фейнмана, но эти правила сами нуждаются в обосновании с позиций нашей статьи.

[3] В координатном представлении условие $-\,i\,k_\mu\,\hat{a}_\mu(k)\,|\,\mathrm{rad}\,\rangle = 0$ записывается как $\partial_\mu \hat{A}_\mu(x)\,|\,\mathrm{rad}\,\rangle = 0$. В литературе и по сей день нет единства мнений по поводу того, можно ли дополнительное условие таким образом формулировать. В таком виде, исходя из аналогии с классической теорией, его формулировал ещё Ферми. В работах [12, 13] было указано, что такое дополнительное условие ведёт к трудностям с нормируемостью состояний в квантовом случае. И в работе [14] оно было заменено на $\partial_\mu \hat{A}^{(+)}_\mu(x)\,|\,\mathrm{rad}\,\rangle = 0$. В дальнейшем в литературе одни авторы использовали условие $\partial_\mu \hat{A}_\mu(x)\,|\,\mathrm{rad}\,\rangle = 0$ [15, 16, 17]. Другие [18] указывали, что такое условие на векторы состояния накладывать нельзя, т. к. при этом возникает противоречие с коммутационными соотношениями. Третьи [19] утверждали, что такое условие можно использовать, но при этом следует проявлять осторожность, поскольку допустимые векторы состояния оказываются ненормируемыми. Эти расхождения во мнениях имеют под собой довольно глубокие причины:

1. В термин „квантование“ обычно не вкладывался никакой точный математический смысл. Фактически, квантованное электромагнитное поле исследовалось путём формальных манипуляций с алгебраическими символами, но при этом не давалось никакого конструктивного определения этого объекта. В такой ситуации дополнительное условие в любом его виде не свободно от критики.
2. Отсутствует удовлетворительная формулировка теории взаимодействующих полей (хотя бы в рамках теории возмущений). Правила Фейнмана при этом не имеют достаточно ясной связи с операторным формализмом, и операторный формализм оказывается оторванным от практических вычислений (прежде всего от теории рассеяния).

Что касается первого замечания, то я полагаю, соотношение $\partial_\mu \hat{A}_\mu(x)\,|\,\mathrm{rad}\,\rangle = 0$ напрямую не противоречит коммутационным

Сейчас мы покажем, что условие (7) обеспечивает положительность скалярного произведения.

9. Положительность скалярного произведения у электромагнитного поля. [4] Рассмотрим полевой осциллятор электромагнитного поля. Будем здесь писать для краткости a_μ вместо $\hat{a}_\mu(+1)$ и a^*_μ вместо $\hat{a}_\mu(-1)$. Эти операторы удовлетворяют соотношениям:

$$[\, a^*_\mu \, , \, a_\nu \,] = g_{\mu\nu}, \qquad [\, a^*_\mu \, , \, a^*_\nu \,] = 0, \qquad [\, a_\mu \, , \, a_\nu \,] = 0 \; .$$

Для интересующего нас квантования также выполняется:

$$a_\mu \, | \, 0 \, \rangle = 0 \; .$$

Дополнительное условие выглядит так:

$$k^{(0)}_\mu a_\mu \, | \, \mathrm{rad} \, \rangle = 0 \; , \tag{8}$$

где $k^{(0)}_\mu$ — фиксированный вектор на световом конусе. Подпространство векторов состояния, удовлетворяющих данному условию, мы обозначим $\mathcal{H}^{\mathrm{rad}}$.

Поскольку оператор $k^{(0)}_\mu a_\mu$ имеет определённую градуировку (его степень равна -1), градуировка пространства состояний $\mathcal{H}$ переносится на подпространство $\mathcal{H}^{\mathrm{rad}}$:

$$\mathcal{H}^{\mathrm{rad}} = \mathcal{H}^{\mathrm{rad}}_0 \dot{+} \mathcal{H}^{\mathrm{rad}}_1 \dot{+} \mathcal{H}^{\mathrm{rad}}_2 \dot{+} \ldots \tag{9}$$

Иначе говоря, подпространство, выделяемое дополнительным условием (8), также распадается в ортогональную сумму состояний с определённым числом частиц.

Поскольку сумма (9) ортогональная, неотрицательность скалярного произведения достаточно доказать для каждого из подпространств $\mathcal{H}^{\mathrm{rad}}_n$.

Произвольный вектор состояния $| \, n \, \rangle$ из подпространства $\mathcal{H}^{\mathrm{rad}}_n$ можно представить в виде:

$$| \, n \, \rangle = T_{\mu\nu\ldots\rho} \, a^*_\mu \, a^*_\nu \ldots a^*_\rho \, | \, 0 \, \rangle \; ,$$

где $T_{\mu\nu\ldots\rho}$ — n -валентный тензор. Этот тензор можно без ущерба для общности считать симметричным.

При этом условие (8) для вектора $| \, n \, \rangle$ оказывается дополнительным условием на тензор $T_{\mu\nu\ldots\rho}$:

$$k^{(0)}_\mu T_{\mu\nu\ldots\rho} = 0 \; . \tag{10}$$

Скалярное произведение же вектора $| \, n \, \rangle$ самого на себя равняется:

$$\langle \, n \, | \, n \, \rangle = (-1)^n \, n! \cdot T^*_{\mu\nu\ldots\rho} \, T_{\mu\nu\ldots\rho} \; . \tag{11}$$

Величина $(-1)^n \, n! \cdot T^*_{\mu\nu\ldots\rho} \, T_{\mu\nu\ldots\rho}$ является суммой положительных вещественных чисел, часть из которых входит в сумму со знаком „плюс“, а часть со знаком „минус“. Этот знак определяется релятивистским правилом суммирования по повторяющимся индексам и множителем $(-1)^n$. Покажем, что эта сумма неотрицательна при условии (10).

Поскольку конструкция пространства состояний инвариантна по отношению к выбору вектора $k^{(0)}_\mu$, этот вектор можно принять равным:

$$k^{(0)}_\mu = \begin{pmatrix} k_0 & | & 0 & 0 & k_0 \end{pmatrix}_\mu \; . \tag{12}$$

соотношениям. Можно лишь сказать, что конструкция квантования, изложенная в этой статье, с таким условием плохо увязывается.

Второе замечание, несомненно, является более существенным. При рассмотрении динамики классического электромагнитного поля мы указали, что дополнительное условие на состояния рассеяния автоматически вытекает из динамики, а вовсе не является произвольным постулатом. Также была ясно показана роль „нефизических“ степеней свободы. И хотя мы в данной статье так и не формулируем теории квантованных взаимодействующих полей, всё же соображения, основанные на аналогии с классической теорией, дают основания думать, что построение теории рассеяния с условием $\partial_\mu A_\mu(x) \, | \, \mathrm{rad} \, \rangle = 0$ — дело малореалистическое.

[4] Материал данного пункта не имеет никакой глубокой связи ни с конструктивностью квантования, ни с алгебраическими, ни с топологическими вопросами, обсуждаемыми в настоящих статьях. Единственная причина, по которой здесь обсуждается этот старый (и очень простой) вопрос состоит в том, что во всех известных мне источниках приводится ошибочное доказательство (при этом почему-то считают, что из положительности квадратичной формы на векторах некоторого базиса вытекает и положительность формы вообще).

Рассмотрим теперь в сумме (11) все слагаемые вида $(-1)^n\, n! \cdot T^*_{0\nu\ldots\rho}\, T_{0\nu\ldots\rho}$. В силу (10) и (12), они полностью сокращаются со слагаемыми вида $(-1)^n\, n! \cdot T^*_{3\nu\ldots\rho}\, T_{3\nu\ldots\rho}$.

Среди оставшихся слагаемых рассмотрим слагаемые вида $(-1)^n\, n! \cdot T^*_{\mu 0\ldots\rho}\, T_{\mu 0\ldots\rho}$. Они полностью сократятся с оставшимися слагаемыми вида $(-1)^n\, n! \cdot T^*_{\mu 3\ldots\rho}\, T_{\mu 3\ldots\rho}$.

И так далее. В результате в сумме (11) останутся лишь слагаемые, индексы которых равны 1 или 2 . Все эти слагаемые входят в сумму (11) со знаком „плюс“.

10. Топология и полнота инвариантного фазового пространства электромагнитного поля. При изучении инвариантного гамильтонова формализма в инвариантное фазовое пространство Z мы вначале включили лишь решения уравнений движения, гладкие в координатном представлении и финитные в пространственном направлении. Вопрос же о том, какой в действительности топологией следует наделять пространство Z вообще не обсуждался. При этом фактически не давалось и точного определения пространства Z^* ; не уточнялось, каким же в точности образом оказываются изоморфными функциональные пространства Z и Z^* ; точное определение скобок Пуассона на Z^* также не давалось. В этом пункте мы покажем, что в пространстве Z можно ввести такую топологию (и пополнить его относительно этой топологии), что оно станет очень похожим на гильбертово пространство. При этом все необходимые для инвариантного гамильтонова формализма свойства у такой топологии будут выполняться.

Симплектическая структура сама по себе не задаёт топологии. Однако, между элементами классического фазового пространства Z и одночастичными состояниями квантованного поля существует взаимно-однозначное соответствие:

$$\underline{c} \;\longleftrightarrow\; (I^{-1}\underline{c})\hat{}\;|\,0\,\rangle\ . \tag{13}$$

Рассмотрим теперь для примера скалярное поле. Среди его инвариантных квантований присутствует квантование с положительно-определённым скалярным произведением. Соответствие (13), во-первых, наделяет пространство Z комплексной структурой, а во-вторых, переносит туда скалярное произведение из одночастичного квантового пространства $\mathcal{H}_1$. Таким образом, Z имеет естественную структуру комплексного гильбертова пространства[5].

Симплектическая структура оказывается непрерывной по паре своих аргументов относительно полученной топологии; симплектическая структура задаёт изоморфизм пространств Z и Z^* ; скобки Пуассона корректно определяются на всём Z^* .

Представим теперь скалярное поле в фурье-представлении в виде:

$$\widetilde{\varphi}(k) = 2\pi\,\delta(k^2 - m^2)\cdot a(k)\ .$$

Соответствие (13) можно записать более явно так:

$$\underline{c} \;\longleftrightarrow\; \int d\mu_m^+ \cdot i\,a(k)^{\underline{c}} \cdot \hat{a}^*(k)\;|\,0\,\rangle\ , \qquad \text{где}\;\; d\mu_m^+ = \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\cdot 2\pi\,\delta(k^2-m^2)\cdot\theta(k)\ .$$

И скалярное произведение в пространстве Z принимает вид:

$$\langle\,\underline{c}\,,\,\underline{d}\,\rangle = \int d\mu_m^+ \cdot a^*(k)^{\underline{c}} \cdot a(k)^{\underline{d}}\ . \tag{14}$$

Буквальное перенесение этой схемы на случай электромагнитного поля не представляется возможным, поскольку, как мы видели, среди $\mathcal{P}$ -инвариантных квантований электромагнитного поля отсутствуют квантования с положительно-определённым скалярным произведением.

Здесь имеется, однако, другая возможность. Представим электромагнитное поле также в фурье-представлении как

$$\widetilde{A}_\mu(k) = 2\pi\,\delta(k^2)\cdot a_\mu(k)\ .$$

По аналогии с формулой (14) введём в классическом фазовом пространстве Z электромагнитного поля скалярное произведение по формуле:

$$\langle\,\underline{c}\,,\,\underline{d}\,\rangle = \int d\mu_m^+ \cdot M_{\nu\rho}\cdot a^*_\nu(k)^{\underline{c}} \cdot a_\rho(k)^{\underline{d}}\ . \tag{15}$$

[5] Полученная топология пространства Z является самой естественной с точки зрения квантования. Бор и Розенфельд [20] заметили, что при рассмотрении квантованного электромагнитного поля необходимо производить усреднение поля по небольшому пространственно-временному объёму: символ $\hat{A}_\mu(x)$ при этом сам по себе физической величиной не является. Проведённое нами рассмотрение показывает, что это утверждение точно так же справедливо и для классического поля, если его фазовое пространство наделяется „правильной“ топологией.

Здесь $M_{\nu\rho}$ — произвольная положительно-определённая эрмитова матрица. В качестве такой матрицы можно взять, например, $M_{\nu\rho} = \operatorname{diag}(+1,+1,+1,+1)_{\nu\rho}$.

Скалярное произведение (15) является положительно-определённым. Поэтому оно определяет некоторую топологию в пространстве Z . Важным является то обстоятельство, что эта топология не зависит от конкретного выбора матрицы $M_{\nu\rho}$.

Отсюда следует, что указанная топология является релятивистски-инвариантной.

Относительно введённой топологии симплектическая структура оказывается непрерывной по паре своих аргументов; симплектическая структура задаёт изоморфизм пространств Z и Z^* ; скобки Пуассона корректно определяются на всём Z^* .

Таким образом, инвариантное фазовое пространство электромагнитного поля обладает естественной структурой линейного комплексного топологического пространства, причём топология в нём задаётся множеством эквивалентных (в смысле топологии) скалярных произведений. Такие пространства мы назовём *пространствами гильбертова типа.*

11. Тензорное произведение пространств гильбертова типа. Сейчас мы покажем, что тензорное произведение пространств гильбертова типа само является пространством гильбертова типа.

Рассмотрим два таких пространства X и Y . Их тензорное произведение (точнее, алгебраическое тензорное произведение) определяется следующим образом.

Рассмотрим все формальные произведения вида $x \diamond y$, где $x \in X$ и $y \in Y$. Мы будем называть такие произведения парами. Будем также считать, что пары можно формально умножать на комплексные числа, образуя при этом выражения вида: $\lambda \cdot x \diamond y$. И рассмотрим все формальные суммы вида:

$$\lambda_1 \cdot x_1 \diamond y_1 + \lambda_2 \cdot x_2 \diamond y_2 + \ldots + \lambda_n \cdot x_n \diamond y_n \ .$$

Две такие суммы мы будем считать эквивалентными, если у них для любой пары совпадает сумма коэффициентов при этой паре. Таким образом, приходим к комплексному векторному пространству, которое мы обозначим как $X \diamond Y$ (это — *свободный* $\mathbb{C}$ *-модуль, порождённый декартовым произведением* $X \times Y$).

В получившемся пространстве рассмотрим элементы вида:

$$1 \cdot (\lambda x) \diamond y - \lambda \cdot x \diamond y \ ,$$

$$1 \cdot x \diamond (\lambda y) - \lambda \cdot x \diamond y \ ,$$

$$1 \cdot (x_1 + x_2) \diamond y - 1 \cdot x_1 \diamond y - 1 \cdot x_2 \diamond y \ ,$$

$$1 \cdot x \diamond (y_1 + y_2) - 1 \cdot x \diamond y_1 - 1 \cdot x \diamond y_2 \ .$$

Линейную оболочку указанных элементов обозначим $X \circ Y$.

Факторизуя $X \diamond Y$ по $X \circ Y$, приходим к тензорному произведению:

$$X \otimes Y = (X \diamond Y)/(X \circ Y) \ .$$

Введём также для краткости обозначение $x \otimes y$. Именно, будем считать, что при указанной факторизации элемент $1 \cdot x \diamond y$ пространства $X \diamond Y$ переходит в элемент $x \otimes y$ пространства $X \otimes Y$.

Если X и Y — обычные гильбертовы пространства, то, как известно, их тензорное произведение $X \otimes Y$ обладает естественной структурой гильбертова пространства. Скалярное произведение в $X \otimes Y$ при этом определяется вначале для пар по формуле:

$$\langle\, x_1 \otimes y_1 \,,\, x_2 \otimes y_2 \,\rangle_{X \otimes Y} = \langle\, x_1 \,,\, x_2 \,\rangle_X \cdot \langle\, y_1 \,,\, y_2 \,\rangle_Y \ , \tag{16}$$

а на остальные элементы переносится, исходя из требования линейности по второму аргументу и антилинейности по первому. Пополняя $X \otimes Y$ относительно указанного скалярного произведения, приходим к гильбертову пространству.

В случае пространств гильбертова типа каждое из пространств X и Y обладает многими эквивалентными скалярными произведениями. Пространство $X \otimes Y$ при этом, согласно указанной схеме, наделяется многими скалярными произведениями. Покажем, что все эти скалярные произведения эквивалентны.

Итак, пусть в одном из двух пространств, например в X , мы переходим от скалярного произведения $\langle \cdot \,, \cdot \rangle_X$ к эквивалентному скалярному произведению $(\,\cdot \,, \cdot\,)_X$. При этом скалярное произведение $\langle \cdot \,, \cdot \rangle_{X \otimes Y}$ в пространстве $X \otimes Y$ заменяется на $(\,\cdot \,, \cdot\,)_{X \otimes Y}$.

Рассмотрим какой-нибудь элемент пространства $X \otimes Y$:

$$z = x_1 \otimes y_1 + x_2 \otimes y_2 + \ldots + x_n \otimes y_n \ .$$

Легко видеть, что этот элемент может быть приведён к такому виду, что в этой сумме все $y_1, y_2, \ldots, y_n$ будут ортогональны друг другу относительно скалярного произведения в Y . Скалярные произведения этого элемента самого на себя примут тогда особенно простой вид:

$$\langle\, z\,,\, z\,\rangle_{X\otimes Y} = \langle\, x_1\,,\, x_1\,\rangle_X \cdot \langle\, y_1\,,\, y_1\,\rangle_Y + \langle\, x_2\,,\, x_2\,\rangle_X \cdot \langle\, y_2\,,\, y_2\,\rangle_Y + \ldots + \langle\, x_n\,,\, x_n\,\rangle_X \cdot \langle\, y_n\,,\, y_n\,\rangle_Y \ , \tag{17}$$

$$(\, z\,,\, z\,)_{X\otimes Y} = (\, x_1\,,\, x_1\,)_X \cdot \langle\, y_1\,,\, y_1\,\rangle_Y + (\, x_2\,,\, x_2\,)_X \cdot \langle\, y_2\,,\, y_2\,\rangle_Y + \ldots + (\, x_n\,,\, x_n\,)_X \cdot \langle\, y_n\,,\, y_n\,\rangle_Y \ . \tag{18}$$

Удобный необходимый и достаточный признак эквивалентности скалярных произведений $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle_{X\otimes Y}$ и $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)_{X\otimes Y}$ состоит в следующем: существует такое $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, что для любого $z \in X \otimes Y$ выполняются условия:

$$\varepsilon \cdot (\, z\,,\, z\,)_{X\otimes Y} < \langle\, z\,,\, z\,\rangle_{X\otimes Y} \ , \qquad \varepsilon \cdot \langle\, z\,,\, z\,\rangle_{X\otimes Y} < (\, z\,,\, z\,)_{X\otimes Y} \ .$$

Но если такое ε существует для скалярных произведений $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle_X$ и $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)_X$, то согласно формулам (17) и (18), оно же годится и для скалярных произведений $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle_{X\otimes Y}$ и $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)_{X\otimes Y}$.

Таким образом, все скалярные произведения в $X \otimes Y$ эквивалентны. Пополняя $X \otimes Y$ относительно топологии, задаваемой этими скалярными произведениями, приходим к пространству гильбертова типа.

12. Топология пространства состояний квантованного электромагнитного поля. Как мы видели, у квантованного электромагнитного поля пространство состояний $\mathcal{H}$ распадается в ортогональную сумму подпространств с определённым числом частиц:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \dot{+} \mathcal{H}_1 \dot{+} \mathcal{H}_2 \dot{+} \ldots \tag{19}$$

Подпространство $\mathcal{H}_0$ одномерно. Поэтому вопрос о его топологии не встаёт.

Подпространство $\mathcal{H}_1$, как было показано в пункте 10, фактически отождествляется с фазовым пространством классического поля Z . Оно является пространством гильбертова типа. Тем самым вопрос о его топологии также решён.

Рассмотрим теперь тензорное произведение пространства Z на себя: $Z \otimes Z$. В нём естественным образом определяется действие группы перестановок из двух элементов. Простейшие элементы преобразуются под действием этой группы как $\underline{a} \otimes \underline{b} \to \underline{b} \otimes \underline{a}$, а на остальные элементы это действие продолжается по линейности.

Оставим среди скалярных произведений в пространстве $Z \otimes Z$ только инвариантные по отношению к действию указанной группы. На практике удобно просто ограничиться произведениями, для которых в правой части формулы (16) стоит произведение одинаковых скалярных произведений.

Тогда группа перестановок действует унитарно[6] в $Z \otimes Z$. И $Z \otimes Z$ распадается в ортогональную сумму двух инвариантных подпространств: симметрического и антисимметрического.

Каждое из этих двух подпространств наследует топологию из $Z \otimes Z$.

Легко видеть, что двухчастичное квантовое пространство $\mathcal{H}_2$ естественно отождествляется с симметрическим подпространством в $Z \otimes Z$ и тем самым наделяется соответствующей топологией.

И так далее. n -частичное подпространство $\mathcal{H}_n$ отождествляется с полностью симметрическим подпространством n -ой тензорной степени Z . И наследует оттуда топологию.

Таким образом, каждое из подпространств в ортогональной сумме (19) является пространством гильбертова типа. С практической точки зрения это очень удобно, поскольку для практических приложений гораздо проще определять описанные пространства с помощью базисов (а не как факторпространства свободных модулей).

Рассмотрим теперь пространство $\mathcal{H}$ в целом. На основе топологий, введённых в его подпространствах, можно вводить разные топологии во всём пространстве. Например, сходимость направленности к нулю можно понимать как независимое стремление к нулю всех проекций этой направленности. Такая топология представляется в данном случае самой естественной.

[6] Под унитарным преобразованием пространства гильбертова типа мы понимаем автоморфизм этого пространства, т. е. взаимно-однозначное отображение на себя, сохраняющее линейную структуру и каждое из скалярных произведений.

Можно же это требование усилить и потребовать дополнительно, например, чтобы начиная с некоторого момента у направленности лишь конечное число проекций отличалось от нуля.

Таким образом, в $\mathcal{H}$ существует много естественных топологий. При этом само пространство $\mathcal{H}$ пространством гильбертова типа не является.

В связи с этим хотелось бы обратить здесь внимание на следующее обстоятельство. В работе Гупты [14] предлагалось квантовать электромагнитное поле в обычном гильбертовом пространстве с положительно-определённой метрикой. Это действительно можно сделать, рассматривая квантования, инвариантные по отношению к более узкой группе, чем группа Пуанкаре (а именно, по отношению к подгруппе группы Пуанкаре, оставляющей инвариантным направление оси времени). Подпространства с фиксированным числом частиц при этом оказываются фактически совпадающими с построенными выше. Но общее пространство $\mathcal{H}$ наделяется при этом топологией, которая не является релятивистски-инвариантной. При этом оказывается, что некоторые состояния поля при квантовании в одной системе отсчёта гильбертову пространству принадлежат, а в другой нет. Таким образом, старый формализм Гупты релятивистски-инвариантным не является, даже неявно.

В своих более поздних работах Гупта пытался отказаться от насильственного введения знакоопределённой метрики. Однако, его последняя публикация на эту тему [22] ясно показала, что никакой явно релятивистски-инвариантной конструкции квантованного электромагнитного поля у него всё равно нет (не говоря уже о проблемах с функциональным анализом).

13. О происхождении антиунитарных преобразований. В соответствии с введённой процедурой квантования, линейные преобразования наблюдаемых классического поля, сохраняющие скобки Пуассона и подпространства Cr и De, порождают унитарные преобразования состояний квантованного поля. Между тем известно, что в квантовой теории важную роль играют также антиунитарные преобразования симметрии. Рассмотрим их происхождение на примере операции обращения времени — T.

Предположим, что лагранжиан классического поля T-инвариантен (примерами могут служить и скалярное поле и электромагнитное). Тогда действие оказывается тоже T-инвариантным. Тем самым, полевые функции, удовлетворяющие принципу стационарного действия, переходят при отражении времени в функции, также удовлетворяющие принципу стационарного действия.

Таким образом, с точки зрения инвариантного гамильтонова формализма, операция обращения времени — это взаимно-однозначное отображение инвариантного фазового пространства Z на себя. Как при этом отображении ведёт себя симплектическая структура? Из вариационного определения симплектической структуры очевидно, что она при этом меняет знак. Такие преобразования, меняющие знак симплектической структуры, естественно называть *антисимплектическими*.

Рассмотрим теперь сопряжённое действие операции обращения времени на элементы сопряжённого пространства $Z^*_{\mathbb{C}}$:

$$a \xrightarrow{T} a_T \;, \qquad a, a_T \in Z^*_{\mathbb{C}} \;.$$

Скобка Пуассона под действием этого преобразования меняет знак:

$$\{\, a_T \,,\, b_T \,\} = -\{\, a \,,\, b \,\} \;.$$

Таким образом, операция обращения времени порождает автоморфизм алгебры Ли $\mathcal{C} \oplus Z^*_{\mathbb{C}}$.

В соответствии с процедурой квантования, изложенной в данной статье, возникает желание построить соответствующий автоморфизм алгебры операторов $\mathcal{O}$ для квантованного поля. Этого, однако, сделать нельзя. Дело в том, что при построении алгебры операторов $\mathcal{O}$ у множества $\mathcal{C} \oplus Z^*_{\mathbb{C}}$ используется не только структура алгебры Ли, но и специальное соответствие между подпространством $\mathcal{C}$ и множеством скаляров $\mathbb{C}$ (соотношение $\hat{1} = (\,)\hat{}\,$). Это означает, что для перенесения операции обращения времени на квантовый случай требуются дополнительные соглашения, кроме уже введённой операции квантования.

Условимся, что слова (т. е. элементы полугруппы $\mathcal{W}$) при обращении времени преобразуются по следующей формуле:

$$\hat{a}\,\hat{b}\ldots\hat{c} \xrightarrow{T} \hat{c}_T\ldots\hat{b}_T\,\hat{a}_T \;, \qquad \hat{a},\hat{b},\ldots,\hat{c},\hat{a}_T,\hat{b}_T,\ldots,\hat{c}_T \in \mathcal{A} \;,$$

т. е. происходит замена каждой буквы на соответствующую, и буквы после этого записываются в обратном порядке. При этом очевидно, что отражение времени на произведение двух слов действует следующим образом:

$$\hat{p}\,\hat{q} \xrightarrow{T} \hat{q}_T\,\hat{p}_T \;, \qquad \hat{p},\hat{q},\hat{p}_T,\hat{q}_T \in \mathcal{W} \;.$$

Взаимно-однозначное отображение полугруппы на себя, обладающее таким свойством можно назвать *антиавтоморфизмом*.

Построенный антиавтоморфизм полугруппы слов $\mathcal{W}$ по линейности продолжается до антиавтоморфизма алгебры фраз $\mathcal{P}$. Далее, легко проверить, что этот антиавтоморфизм алгебры фраз порождает антиавтоморфизм алгебры операторов $\mathcal{O}$.

Предположим далее, что при обращении времени рождающее подпространство Cr и уничтожающее De переходят друг в друга. Это условие обычно выполняется потому, что эти подпространства являются отрицательно- и положительно-частотными, соответственно. Левый идеал, натянутый на $De^{\frown}$, при обращении времени переходит в правый идеал, натянутый на $Cr^{\frown}$. Получающийся в результате факторизации левый модуль переходит в соответствующий правый модуль.

Таким образом, операция обращения времени задаёт взаимно-однозначное линейное соответствие кет- и бра-векторов[7].

Скалярное произведение, как нетрудно видеть, при обращении времени сохраняется:

$$\langle\, x \,|\, y \,\rangle = \langle\, y_T \,|\, x_T \,\rangle \; . \tag{20}$$

Поскольку между кет- и бра-векторами имеется взаимно-однозначное антилинейное соответствие, то можно проводить все рассуждения в рамках одного пространства, например, пространства кет-векторов. Тогда операция обращения времени может рассматриваться как взаимно-однозначное антилинейное преобразование этого пространства. Соотношение (20) показывает, что при указанном преобразовании скалярное произведение изменяется на комплексно-сопряжённое. Преобразование, обладающее такими свойствами, называют *антиунитарным*.

В заключение хочу поблагодарить В. М. Шабаева, Л. Д. Фаддеева, В. А. Франке, В. Д. Ляховского, Л. В. Прохорова, В. В. Верещагина и Ю. М. Письмака за плодотворные дискуссии.

Список литературы

[1] R. E. Peierls “The commutation laws of relativistic field theory”, Proc. Roy. Soc. (London) **A214**, 143-157 (1952).

[2] Б. С. Девитт *„Динамическая теория групп и полей“*, М.: Наука (1987). [B. S. DeWitt *“Dynamical theory of groups and fields”*, New York: Gordon and breach (1965).]

[3] V. A. Fock “Konfigurationsraum und zweite Quantelung”, Z. Phys. **75**, 622-647 (1932). [„Конфигурационное пространство и вторичное квантование“, в сб. [4], стр. 25-51.]

[4] В. А. Фок *„Работы по квантовой теории поля“*, Л.: изд-во ЛГУ (1957).

[5] Дж. Макки *„Представления групп в гильбертовом пространстве“*, приложение в кн. [6]. [G. W. Mackey “Group representations in Hilbert space”, appendix in the book [6].]

[6] И. Сигал *„Математические проблемы релятивистской физики“*, М.: Мир (1968). [I. E. Segal *“Mathematical problems of relativistic physics”*, Providence, Rhode island: AMS (1963).]

[7] S. Weinberg *“The quantum theory of fields”*, v. 1: *“Foundations”*, Cambridge univ. press (1996).

[8] А. С. Шварц *„Математические основы квантовой теории поля“*, М.: Атомиздат (1975).

[9] А. А. Кириллов „Геометрическое квантование“, Итоги науки и техн. Совр. пробл. мат. Фунд. напр. **4**, 141-178 (1985).

[10] Ф. А. Березин „Континуальный интеграл по траекториям в фазовом пространстве“, УФН **132**(3), 497-548 (1980).

[11] K. Bleuler “Eine neue Methode zur Behandlung der longitudinalen und skalaren Photonen”, Helv. Phys. Acta **23**(5), 567-586 (1950).

[12] S. T. Ma “Relativistic formulation of the quantum theory of radiation”, Phys. Rev. **75**, 535-535 (1949).

[7] Швингер предлагал [23] интерпретировать кет-векторы как символы, обозначающие создание системы в прошлом; бра-векторы как символы, обозначающие уничтожение системы в будущем; а операторы как действие приборов в ходе эксперимента. Такая интерпретация оказывается здесь весьма естественной.

[13] F. J. Belinfante “On the part played by scalar and longitudinal photons in ordinary electromagnetic fields”, Phys. Rev. **76**(2), 226-233 (1949).

[14] S. N. Gupta “Theory of longitudinal photons in quantum electrodynamics”, Proc. Phys. Soc. A **63**(7), 681-691 (1950).

[15] В. Е. Тирринг *„Принципы квантовой электродинамики“*, М.: Высшая школа (1964). [W. E. Thirring *“Principles of quantum electrodynamics”*, New York: Academic press (1958).]

[16] Х. Умэдзава *„Квантовая теория поля“*, М.: ИЛ (1958). [H. Umezawa *“Quantum field theory”*, Amsterdam: North-Holland publ. (1956).]

[17] П. А. М. Дирак *„Принципы квантовой механики“*, М.: Наука (1979). [P. A. M. Dirac *“The principles of quantum mechanics”*, Oxford: Clarendon press (1958).]

[18] Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков *„Введение в теорию квантованных полей“*, М.: Наука (1984).

[19] Л. В. Прохоров „Квантование электромагнитного поля“, УФН **154**(2), 299-320 (1988).

[20] N. Bohr, L. Rosenfeld “Zur Frage der Messbarkeit der elektromagnetischen Feldgrössen”, Kgl. Danske Vidensk. Selskab., Math.-Fys. Medd. **12**(8), 3-65 (1933). [„К вопросу об измеримости электромагнитного поля“, в сб.: [21], т. 2, стр. 120-162.]

[21] Н. Бор *„Избранные научные труды“*, т. 2, М.: Наука (1971).

[22] S. N. Gupta “Lorentz covariance of quantum electrodynamics with the indefinite metric”, Prog. Theor. Phys. **21**(4), 581-584 (1959).

[23] Ю. Швингер *„Квантовая кинематика и динамика“*, М.: Наука (1992). [J. Schwinger *“Quantum kinematics and dynamics”*, New York: W. A. Benjamin, Inc. (1970).]